

Κεφάλαιο 1:

Σχεδίαση γραμμών – Μετασχηματισμοί

Εισαγωγή

Όσο κι αν αυτό φαίνεται περίεργο παρατηρώντας ένα πολύπλοκο αρχιτεκτονικό σχέδιο ή μια φωτορεαλιστική εικόνα, η βασική δομική μονάδα των διανυσματικών γραφικών είναι η απλή γραμμή. Σύνολα από τέτοιες γραμμές, καμπύλες ή όχι, απαρτίζουν τα σχήματα που παρουσιάζουμε ή αποδίδουμε στην οθόνη του υπολογιστή ή σε μια άλλη συσκευή εξόδου. Έτσι, η ταχύτητα και η ποιότητα στη σχεδίαση και την επεξεργασία τους αποκτούν μεγάλη σημασία και μπορεί να κάνουν τη διαφορά, ειδικά σε συστήματα που περιέχουν αλληλεπίδραση ή διάλογο με το χρήστη (interactive). Επίσης με την υλοποίηση αυτών των βασικών λειτουργιών σε υλικό (επιταχυντές γραφικών) μπορούμε να απαλλάξουμε την κεντρική μονάδα του υπολογιστή μας από τους αντίστοιχους υπολογισμούς και να κάνουμε την όλη διαδικασία πιο γρήγορη, πλησιάζοντας σε ταχύτητες πραγματικού χρόνου.

Σχεδίαση γραμμών

Για να σχεδιάσουμε μια τυχαία γραμμή στη συσκευή εξόδου ενός υπολογιστή χρησιμοποιούμε λίγο ως πολύ μια μεταφορά

των μεθόδων σχεδίασης στο χαρτί, προσαρμοσμένες στον ψηφιακό κόσμο. Έτσι, ορίζουμε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων για τα εικονοστοιχεία της οθόνης (pixels), τοποθετώντας την αρχή του σε μια από τις γωνίες της. Λόγω της διακριτής φύσης των pixels δε μπορούμε να σχεδιάσουμε όλα και ακριβώς αυτά τα σημεία της γραμμής μας, δηλαδή αυτά που ικανοποιούν τη μαθηματική της εξίσωση. Αυτό συμβαίνει γιατί, ενώ τα σημεία του καρτεσιανού επιπέδου είναι άπειρα, έχουν στοιχειώδεις διαστάσεις και μηδενική απόσταση μεταξύ τους, τα αντίστοιχα μεγέθη για τα pixels είναι πεπερασμένα και δίνουν μια εικόνα των προδιαγραφών της συσκευής εξόδου. Ορίζουμε λοιπόν τη διακριτότητα (resolution) της οθόνης σαν τον αριθμό των pixels που μπορούν να σχεδιαστούν ανεξάρτητα πάνω σε αυτή. Μια τυπική τέτοια ανάλυση για μια οθόνη είναι 96 pixels ανά ίντσα (= 2.54 cm), που σημαίνει ότι δύο εικονοστοιχεία που απέχουν περίπου 1/100 της ίντσας μόλις που ξεχωρίζουν το ένα από το άλλο. Ένα μέγεθος που έχει άμεση σχέση με την ανάλυση είναι ο αριθμός των όχι απαραίτητα διακριτών pixels που μπορούν να σχεδιαστούν κατά τους δύο άξονες (addressability) που ορίζεται ως το αντίστροφο της απόστασης δύο γειτονικών, κάθετα ή οριζόντια αντίστοιχα, pixels. Μαζί με αυτά και λαμβάνοντας υπόψη μας και το μέγεθος των pixels (dot size) και τη απόστασή τους (interdot spacing) μπορούμε να καταλήξουμε στις φυσικές διαστάσεις μιας οθόνης, ανάλογα με τις ανάγκες μας ή, αντίστροφα, στη μέγιστη ανάλυση που μπορούμε να έχουμε σε μια δεδομένη οθόνη υπολογιστή.

Απαιτήσεις

Εκτός από την προφανή απαίτηση για ταχύτητα, μια που σε μια στοιχειώδη εφαρμογή πρέπει να σχεδιαστούν χιλιάδες γραμμές ανά δευτερόλεπτο, ποιες άλλες προϋποθέσεις πρέπει να καλύπτει ένας αλγόριθμος σχεδίασης και επεξεργασίας γραμμών για να θεωρείται ικανοποιητικός; Μια πρώτη απαίτηση είναι οι ευθείες γραμμές να φαίνονται ευθείες. Αυτό δεν είναι και τόσο προφανές όσο αρχικά φαίνεται λόγω της διακριτής φύσης των pixels. Έτσι, για κάθετες ή οριζόντιες γραμμές, καθώς επίσης και για γραμμές που σχηματίζουν γωνία 45° με τους άξονες δεν έχουμε πρόβλημα, αφού τα pixels είναι στοιχισμένα και συμμετρικά κατά την οριζόντια και κάθετη διεύθυνση. Για τις άλλες γραμμές όμως πρέπει κάθε φορά που κάποιο σημείο της οθόνης δεν επαληθεύει την εξίσωσή τους να αποφασίζουμε με σωστό και γρήγορο τρό-

πο με ποιο ακριβώς pixel θα προσεγγίσουμε τη γραμμή, έτσι ώστε αυτή να πλησιάζει στο ζητούμενο αισθητικό αποτέλεσμα.

Μια άλλη απαίτηση είναι οι γραμμές να τερματίζουν ακριβώς και να είναι αναλλοίωτες ως προς τη σειρά των ακραίων σημείων (end points). Αυτό σημαίνει ότι μια ευθεία από το σημείο (x_1, y_1) ως το (x_2, y_2) πρέπει να αρχίζει και να τελειώνει ακριβώς σε αυτά τα σημεία ή τουλάχιστον στις καλύτερες προσεγγίσεις τους και να περιέχει ακριβώς τα ίδια pixels με την ευθεία από το (x_2, y_2) ως το (x_1, y_1) . Αυτό είναι απαραίτητο για να μην παρουσιάζονται κενά ή επικαλύψεις σε διαδοχικές γραμμές και να μην έχουμε προβλήματα σε διαλογικές εφαρμογές. Τέλος, πρέπει επίσης να εξασφαλίσουμε τη διατήρηση σταθερών διαστάσεων κατά μήκος μιας γραμμής. Είτε η γραμμή μας είτε σχεδιάζεται σε ανοιχτόχρωμο φόντο, οπότε χρωματίζουμε τα αντίστοιχα pixels, είτε σε σκούρο, οπότε σχεδιάζουμε κάποια pixels πιο φωτεινά, πρέπει να έχει σταθερή πυκνότητα και πάχος, έτσι ώστε να πλησιάζει αυτό που θα βλέπαμε αν τη σχεδιάζαμε στο χαρτί.

Digital Differential Analyzer (DDA)

Όπως ξέρουμε από τα μαθηματικά, μια απλή αναπαράσταση μιας ευθείας είναι η εξίσωση διαφορών $\Delta y / \Delta x = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$, που μπορεί να γίνει

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y = y_i + (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1) \Delta x$$

όπου (x_1, y_1) και (x_2, y_2) είναι τα ακραία σημεία της γραμμής. Μια απλή υλοποίηση σε ψευδοκώδικα είναι η εξής:

```
procedure DDA (x1, x2, y1, y2 :
integer)
var    i, length : integer ;
      x, y, dx, dy : real ;
begin
  length = max(abs(x2-x1), abs(y2-y1));
  dx := (x2-x1)/length;
  dy := (y2-y1)/length;
  for i = 1 to length do
  begin
    plot (trunc(x), trunc(y));
    x := x+dx;
    y := y+dy;
  end { for }
end.
```

Ας τρέξουμε τον κώδικα δύο φορές, μια για τη γραμμή (0, 0) - (5, 5) και μια για τη γραμμή (0, 0) - (- 8, - 4) . Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

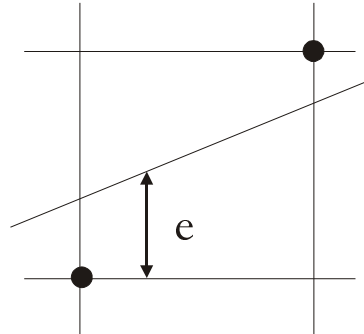
Πίνακας 1: Εκτέλεση του αλγόριθμου σχεδίασης γραμμών

Βήμα	Plot (0, 0) - (5, 5)	Plot (0, 0) - (- 8, - 4)
1	0, 0	-1, -1
2	1, 1	-2, -1
3	2, 2	-3, -2
4	3, 3	-4, -2
5	4, 4	-5, -3
6	5, 5	-6, -3
7		-7, -4
8		-8, -4

Παρατηρούμε ότι στον παραπάνω κώδικα χρησιμοποιήσαμε $i = 1$ κι όχι $i = 0$ σαν αρχική τιμή στο βρόχο for, με αποτέλεσμα να μη σχεδιαστεί το τελευταίο σημείο, πράγμα που φαινομενικά αντιβαίνει με τις απαιτήσεις μας. Σκεφτείτε όμως την περίπτωση της σχεδίασης μιας νέας γραμμής που να ξεκινά από το τελευταίο σημείο της προηγούμενης. Εδώ θα έπρεπε να ξανασχεδιάσουμε το ίδιο σημείο, που έτσι θα χρωματιζόταν πιο έντονα ή θα έσβηνε τελείως αν χρησιμοποιούσαμε σχεδίαση με λογική XOR (τα άσπρα pixels όπου σχεδιάζονται γίνονται μαύρα και αντίστροφα) και η συνοχή των γραμμών μας θα καταστρεφόταν. Έτσι λοιπόν επιλέγουμε να μη σχεδιάζουμε το τελευταίο pixel, πράγμα που δεν είναι τόσο ορατό για απλά ευθύγραμμα τμήματα. Ακόμα, όπως φαίνεται στο δεύτερο παράδειγμα, η έξοδος του κώδικα εξαρτάται από τον προσανατολισμό της γραμμής, ενώ χρησιμοποιεί πράξεις κινητής υποδιαστολής που είναι χρονοβόρες. Θα πρέπει λοιπόν να αναπτύξουμε έναν ορθότερο κώδικα, θυσιάζοντας ενδεχομένως την απλότητα του DDA.

Ο αλγόριθμος του Bresenham

Διατυπώνοντας έναν νέο αλγόριθμο, κρατάμε από το DDA τη μεταβολή της μιας από τις δύο συντεταγμένες κατά μια ακριβώς μονάδα σε κάθε βήμα, ενώ εισάγουμε στους υπολογισμούς και έναν όρο σφάλματος e , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, ο οποίος καθορίζει το αν θα μεταβάλλεται και η δεύτερη συντεταγμένη.



Εικόνα 1: Απεικόνιση του όρου e για το σφάλμα

Το e καταγράφει την απόσταση ανάμεσα στα ακριβή σημεία της γραμμής και αυτά που τελικά σχεδιάζονται, μετρώντας κάθετα στον άξονα στον οποίο έχουμε τη μεγαλύτερη μετακίνηση. Στο πρώτο μας παράδειγμα δηλαδή, ο όρος e μετρήθηκε κατά τον κατακόρυφο άξονα. Σε κάθε επανάληψη λοιπόν, το πρόσημο του e καθορίζει την κατεύθυνση προς την οποία θα μεταβληθεί η τεταγμένη του επόμενου σημείου. Έτσι, θετικό e σημαίνει πως η ακριβής γραμμή βρίσκεται πάνω από το τρέχον σημείο και η τεταγμένη του επόμενου πρέπει να αυξηθεί κατά μια μονάδα, η οποία αφαιρείται από το e . Σε αντίθετη περίπτωση, η τεταγμένη μένει σταθερή. Αμέσως μετά, προσθέτουμε στο e την κλίση της γραμμής ($\Delta y / \Delta x$) και επαναλαμβάνουμε.

```

procedure Bresenham (x1, x2, y1,
y2: integer)
var   e : real ;
      i, x, y, dx, dy : integer ;
begin
  e := (dx/dy) - 0.5 ;
  for i := 1 to dx do
  begin
    plot (x, y) ;
    if e > 0 then
    begin
      y := y + 1 ;
      e := e - 1 ;
    end ; { if }
    x := x + 1 ;
    e := e + (dy/dx)
  end ; { for }
end.

```

Μια ακόμα βελτίωση που μπορούμε να κάνουμε είναι η αποφυγή της διαίρεσης ακεραίων για τον υπολογισμό της κλίσης της γραμμής. Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε το e με $2\Delta x$ και έτσι να έχουμε αρχική συνθήκη $e := 2\Delta y - \Delta x$. Το αποτέλεσμα δεν

αλλάζει αφού μας ενδιαφέρει μόνο το πρόσημο του e και όχι το μέτρο του.

Λύσαμε λοιπόν το πρόβλημα της εξάρτησης από τον προσανατολισμό, αφού τώρα δεν έχουμε αρχικές συνθήκες όπως πριν, και απαλλαγίκαμε από τις χρονοβόρες διαιρέσεις. Το μόνο πρόβλημα πλέον είναι ότι δε μπορούμε να σχεδιάσουμε γραμμές με αρνητική κλίση ή μεγαλύτερη από 45° , δηλαδή περιοριζόμαστε στο πρώτο τεταρτοκύκλιο. Η απάντηση εδώ είναι απλή: κάνουμε αρχικά μια διερεύνηση της κλίσης ελέγχοντας το πρόσημο των Δx , Δy και αν η γραμμή μας είναι σε άλλο τεταρτοκύκλιο από το πρώτο, εναλλάσσουμε τα x και y και επιλέγουμε τη μεταβολή είτε του x , είτε του y κατά μια μονάδα, ανάλογα με το τεταρτοκύκλιο που βρισκόμαστε.

Σχεδίαση κύκλων

Χρησιμοποιώντας την ίδια λογική όπως του DDA, μπορούμε να ορίσουμε εξισώσεις για τα διαδοχικά σημεία ενός κύκλου :

$$x_{i+1} = x_i * \cos\theta + y_i * \sin\theta$$

$$y_{i+1} = y_i * \cos\theta + x_i * \sin\theta$$

Αν κρατήσουμε το θ σχετικά μικρό και προϋπολογίσουμε τα $\cos\theta$ και $\sin\theta$ που είναι σταθερά για δεδομένη ακτίνα, τότε έχουμε έναν κατάλληλο αλγόριθμο για σχεδίαση κύκλων. Αντίστοιχες αλλαγές μπορούμε να επιβάλουμε και στον αλγόριθμο του Bresenham.

Αλγόριθμος double-step

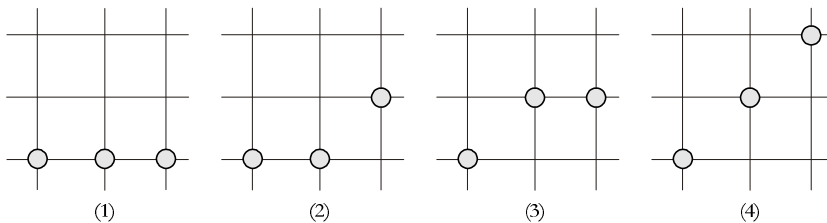
Οι αλγόριθμοι που είδαμε παραπάνω λειτουργούν με ακολουθιακή λογική, με την έννοια ότι για το τελευταίο pixel που έχουν σχεδιάσει, επιλέγουν το πιο πρόσφορο από τα δύο γειτονικά στα οποία μπορούν να κινηθούν (αμέσως δεξιά ή διαγώνια δεξιά και πάνω, με την επιφύλαξη της συμμετρίας). Αυτή η επιλογή γίνεται συνήθως με βάση το πρόσημο κάποιας συγκεκριμένης ποσότητας (σφάλμα), η οποία συνήθως υπολογίζεται χρησιμοποιώντας αριθμητική ακεραίων και δυαδικές πράξεις – αυτό πρακτικά σημαίνει ότι οι ακολουθιακοί αλγόριθμοι είναι αρκετά γρήγοροι και για αυτό το λόγο και αρκετά δημοφιλείς.

Μια κάπως διαφορετική γενιά αλγορίθμων εκμεταλλεύεται περισσότερο τη συμμετρία μέσα στην ίδια τη σχεδιασμένη γραμ-

μή, για να αποφύγει τη σύγκριση με το σφάλμα για κάποια από τα υποψήφια pixels κι έτσι να πετύχει μεγαλύτερα κέρδη σε υπολογιστικό φόρτο. Η τεχνική που θα δούμε εδώ υπολογίζει με παρεμβολή ακριβώς τα μισά pixels της γραμμής και εφαρμόζεται από τα δύο άκρα της προς το μέσο της. Ας θεωρήσουμε ότι η δισδιάστατη γραμμή που θέλουμε να σχεδιάσουμε έχει την έκφραση $f(x, y) = 0$ και έχει συνεχή πρώτη παράγωγο. Γενικά, μπορούμε να χωρίσουμε αυτήν την καμπύλη σε τμήματα για τα οποία ισχύει κάποια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- $0 \leq dy/dx \leq 1$
- $1 \leq dy/dx \leq \infty$
- $-\infty \leq dy/dx \leq -1$
- $-1 \leq dy/dx \leq 0$

Αν λάβουμε υπόψη μας τη συμμετρία ως προς τον άξονα $y = x$ και εφαρμόσουμε ενδεχομένως αλλαγή της κατεύθυνσης της γραμμής, τότε όλες οι πιθανές περιπτώσεις μπορούν να μετατραπούν στην πρώτη από αυτές. Με αυτήν τη λογική, ας μελετήσουμε ποιες είναι οι εναλλακτικές λύσεις για τη σχεδίαση των επόμενων pixels στην οθόνη μας, με δεδομένο ότι έχουμε σχεδιάσει το pixel στη θέση (x_0, y_0) . Οι επόμενες εικόνες δείχνουν τις τέσσερις πιθανές περιπτώσεις για τις γραμμές που μελετάμε.



Εικόνα 2: Οι τέσσερις δυνατές περιπτώσεις για τα δύο επόμενα pixels

Ξεκινώντας από το pixel στη θέση (x_0, y_0) , αυξάνουμε τη συντεταγμένη x κατά δύο μονάδες. Αν επιλέξουμε για σχεδίαση το κάτω δεξιά pixel του εικονικού αυτού πίνακα 2×2 , τότε θα ισχύει η περίπτωση (1), ενώ αν το επιλεγμένο pixel είναι το πάνω δεξιά, θα ισχύει η περίπτωση (4). Και στις δύο αυτές περιπτώσεις, η επιλογή του ενδιάμεσου pixel είναι εύκολη και μονοσήμαντη, αφού στην περίπτωση (1), θα είναι το pixel αμέσως δεξιά από το αρχικό, ενώ στην (4) θα είναι το επόμενο προς τα πάνω και δεξιά. Η επιλογή είναι περισσότερο δύσκολη, αν το pixel που σχεδιάσαμε ανήκει στις περιπτώσεις (2) ή (3). Επειδή αυτές οι δύο περιπτώσεις είναι ισοδύναμες, σε ό,τι αφορά στο μεθεπόμενο pixel, θα αναφερόμαστε σε αυτές σαν περίπτωση (2/3). Με βάση τις συμμετρίες και την κατανομή του σφάλματος στη σχεδίαση,

προκύπτει ότι οι δυνατές ομάδες περιπτώσεων που μπορεί να είναι υποψήφιες ταυτόχρονα είναι είτε οι (1) και (2/3), είτε οι (2/3) και (4). Αρχικά λοιπόν αρχικά να διακρίνουμε ποια από τις δύο ομάδες περιπτώσεων ισχύει και κατόπιν ποια από τις δύο υποπεριπτώσεις μέσα σε αυτήν την ομάδα. Θυμηθείτε ότι η γραμμή μας είναι ορισμένη ως $y = (dy/dx) \cdot x$ και ισχύει $0 \leq dy/dx \leq 1$. Αν επιπρόσθετα ισχύει και $dy/dx \leq 1/2$, τότε ο αλγόριθμος δίνεται από τη σχέση:

$$D_{i+1} = \begin{cases} D_i + \alpha_1, & \text{αν } D_i < 0 \text{ (περίπτωση 1)} \\ D_i + \alpha_2, & \text{αλλιώς (περίπτωση 2/3)} \end{cases}$$

όπου έχουμε θέσει $D_1 = 4dy - dx$, $\alpha_1 = 4dy$ και $\alpha_2 = 4dy - 2dx$, για $i = 1, 2, \dots$

Αλλιώς, αν ισχύει $dy/dx \geq 1/2$, τότε ο αλγόριθμος γίνεται:

$$D_{i+1} = \begin{cases} D_i + \beta_1, & \text{αν } D_i < 0 \text{ (περίπτωση 2/3)} \\ D_i + \beta_2, & \text{αλλιώς (περίπτωση 4)} \end{cases}$$

όπου έχουμε θέσει $D_1 = 4dy - 3dx$, $\beta_1 = 4 - 2dx$ και $\beta_2 = 4(dy - dx)$, για $i = 1, 2, \dots$

Για να διακρίνουμε τώρα ανάμεσα στις περιπτώσεις (2) και (3), πρέπει να εφαρμόσουμε έναν ακόμα έλεγχο:

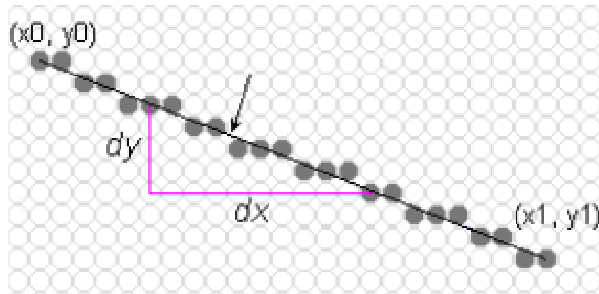
$$D_i < \begin{cases} 2 dy & , \text{αν } 0 \leq dy/dx \leq 1/2 \\ 2 (dy-dx) & , \text{αν } 1/2 \leq dy/dx \leq 1 \end{cases}$$

Αν ο έλεγχος είναι θετικός, τότε εφαρμόζεται η περίπτωση (2). Αν αμελήσουμε το χρόνο που χρειάζεται για να σχεδιαστεί ένα pixel στην οθόνη, τότε αποδεικνύεται ότι ο παραπάνω αλγόριθμος είναι 2 – 4 φορές πιο γρήγορος από αυτόν του Bresenham.

Αναδίπλωση

Δε χρειάζεται παρά ελάχιστη παρατήρηση των αποτελεσμάτων των παραπάνω αλγορίθμων για να δει κανείς ότι όλοι, ανεξάρτητα από πλεονεκτήματα ή μειονεκτήματα, παρουσιάζουν το ίδιο σημαντικό πρόβλημα: οι γραμμές που σχεδιάζουν δεν είναι ακριβώς ευθείες, αλλά φαίνονται να έχουν τη μορφή σκάλας (staircase effect). Αυτό βέβαια δεν είναι λάθος στη σχεδίαση των αλγορίθμων, αλλά συνέπεια της διακριτής δομής των pixels

σε μια οθόνη. Αυτό σημαίνει πως σχεδόν ποτέ δε μπορούμε να σχεδιάσουμε ακριβώς τα σημεία που ικανοποιούν τη μαθηματική εξίσωση μιας γραμμής και πως όσο και να λιγοστέψουμε το σφάλμα, αυτό δε θα γίνει ποτέ μηδενικό ή τουλάχιστον σταθερό για όλα τα σημεία.



Εικόνα 3: Μια «τέλεια» γραμμή και η προσέγγισή της με pixels (γκρίζο χρώμα)

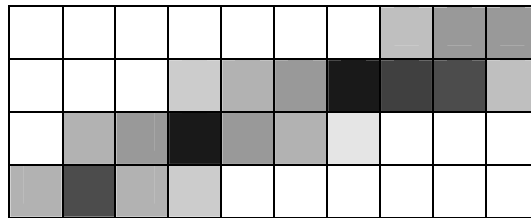
Αν δούμε αυτό το φαινόμενο από φασματική σκοπιά θα παρατηρήσουμε ότι στο χρωματικό φάσμα μιας γραμμής εισάγονται ανεπιθύμητες συνιστώσες που οφείλονται ακριβώς σε αυτό το σφάλμα σχεδίασης. Τα «σκαλιά» (jaggies) που είδαμε πριν είναι μια μόνο εκδήλωση του φαινομένου της αναδίπλωσης. Ας δούμε πώς μπορούμε να καταπολεμήσουμε αυτό το πρόβλημα.

Μελετώντας τον αλγόριθμο του Bresenham βλέπουμε ότι για γραμμές που βρίσκονται στο πρώτο τεταρτημόριο, σε κάθε βήμα του αλγορίθμου προχωράμε στην επόμενη στήλη. Αν δύο διαδοχικά pixels που σχεδιάζουμε δεν είναι στην ίδια σειρά - και αυτό θα συμβεί αν η γραμμή μας δεν είναι ακριβώς οριζόντια ή κατακόρυφη - η γραμμή μας θα εμφανιστεί με ένα «σκαλί» στην οθόνη. Αν όμως διπλασιάσουμε την ανάλυση της εικόνας μας, η γραμμή μας θα περνάει από διπλάσιο αριθμό στηλών, άρα θα έχουμε διπλάσιο αριθμό σκαλιών. Επειδή όμως τώρα έχουμε και διπλάσια ανάλυση, τα σκαλιά αυτά έχουν ακριβώς τις μισές διαστάσεις από πριν και επομένως φαίνονται λιγότερο. Ακόμα, με τη μεγαλύτερη ανάλυση πετυχαίνουμε καλύτερη προσέγγιση της γραμμής. Δυστυχώς όμως αυτό δε λύνει το πρόβλημα, παρά μόνο μειώνει την έντασή του κι αυτό με τεράστια επιβάρυνση στον απαιτούμενο χρόνο και χώρο υπολογισμών.

Μια καλύτερη λύση προκύπτει αν παρατηρήσουμε πως οι γραμμές που σχεδιάζουμε αναγκαστικά έχουν και πάχος εκτός από μήκος, αντίθετα με τον ακριβή γεωμετρικό ορισμό τους. Έτσι λοιπόν οι οριζόντιες και κάθετες γραμμές έχουν πάχος ένα pixel, ενώ για τις πλάγιες το πάχος ποικίλλει κατά το μήκος τους. Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε ότι οι γραμμές μας κα-

λύπτουν ένα ορθογώνιο πάνω στο επίπεδο και ότι τα pixels που βρίσκονται κατά ένα μόνο μέρος τους μέσα σε αυτό το ορθογώνιο θα πρέπει να χρωματιστούν τόσο έντονα όσο τους αναλογεί με βάση το εμβαδόν τους που βρίσκεται μέσα στο ορθογώνιο. Ο υπολογισμός αυτού του εμβαδού μπορεί να γίνει διαιρώντας κάθε pixel σε στοιχειώδη sub-pixels και μετά μετρώντας πόσα από αυτά βρίσκονται μέσα στο ορθογώνιο της γραμμής. Ας δούμε ένα παράδειγμα με μια γραμμή από το σημείο (1, 1) ως το (10, 4). Αν σχεδιάζουμε με μαύρο χρώμα πάνω σε λευκό φόντο, παρατηρούμε πως το pixel (2, 1) είναι κατά 70% μαύρο, ενώ το (2, 2) είναι μόνο κατά 25 % μαύρο. Αυτή η διαδικασία (area sampling - δειγματοληψία εμβαδού) μπορεί να μειώσει το αντιαισθητικό φαινόμενο της αναδίπλωσης, κάνοντας πιο ομαλή τη μετάβαση από το λευκό στο μαύρο. Έτσι οι γραμμές φαίνονται πιο ευθείες, αν τις δούμε από πιο μακριά, χάνουν όμως τη σαφήνεια των ορίων τους.

Εικόνα 4: Σχεδίαση με area sampling



Στην παρακάτω εικόνα βλέπουμε την ίδια γραμμή, σχεδιασμένη με τρεις διαφορετικούς τρόπους. Στην πρώτη περίπτωση, η γραμμή δεν έχει υποστεί καμιά επεξεργασία κι έτσι τα jaggies είναι ιδιαίτερα εμφανή, ειδικά στη μεγεθυσμένη έκδοση. Στη δεύτερη περίπτωση, έχει εφαρμοστεί η διαδικασία του area sampling – το πρόβλημα όμως, όπως φαίνεται στη δεξιά στήλη είναι ότι, αισθητικά τουλάχιστον, δεν ικανοποιείται το κριτήριο για τη διατήρηση του πάχους της γραμμής. Για το λόγο αυτό, τα pixels που βρίσκονται στα σημεία που η γραμμή μας μεταβαίνει σε επόμενη σειρά στον άξονα y, και στα οποία είναι περισσότερο εμφανή τα αποτελέσματα του area sampling, σχεδιάζουμε και τα pixels της ίδιας της γραμμής με γκριζο χρώμα, αντί για το μαύρο. Με αυτόν τον τρόπο, θυσιάζουμε ακόμα περισσότερο τη σαφήνεια της γραμμής, έχουμε όμως πιο ομοιόμορφο αποτέλεσμα.



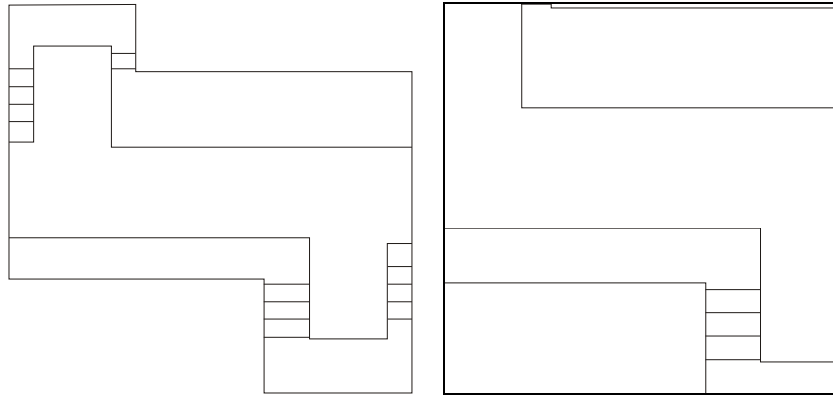
Εικόνα 5: Σχεδίαση με διαφορετικές τεχνικές κατά της αναδίπλωσης

Ψαλίδισμα γραμμών (clipping)

Πολλές εφαρμογές των γραφικών δίνουν στο χρήστη την εντύπωση ότι κοιτά μέσα από ένα παράθυρο σε μια πολύ μεγάλη εικόνα. Συνήθως χρησιμοποιούνται οι τεχνικές κλιμάκωσης και μεταφοράς που περιγράφηκαν προηγουμένως, για να δημιουργηθεί ποικιλία διαφορετικών όψεων ενός σχεδίου. Άλλες εφαρμογές, όπως εμφάνιση γεωγραφικών χαρτών και σχεδίαση κυκλωμάτων, χρησιμοποιούν επίσης γραμμικούς μετασχηματισμούς.

Για να εμφανιστεί μεγεθυμένο ένα τμήμα μιας εικόνας, πρέπει όχι μόνο να εφαρμόσουμε την ανάλογη κλιμάκωση και μεταφορά, αλλά και να καθορίσουμε τα ορατά μέρη της εικόνας που θα συμπεριληφθούν στην προβολή της. Αυτή η διαδικασία επιλογής δεν είναι με κανένα τρόπο απλή, καθώς μερικές γραμμές μπορεί να βρίσκονται μόνο εν μέρει μέσα στην ορατή περιοχή της εικόνας και ένα ή περισσότερα τμήματά τους να βρίσκονται έξω από αυτήν. Αυτές οι γραμμές δεν μπορούν να παραλειφθούν εντελώς από το τελικό αποτέλεσμα επειδή η τελική εικόνα μπορεί να είναι ανακριβής, όπως φαίνεται στο παράδειγμα του παρακάτω σχήματος. Παρόμοια, δεν πρέπει να προσπαθήσουμε να σχεδιάσουμε ολόκληρη κάθε μερικά ορατή γραμμή. Κάτι τέτοιο σημαίνει ότι προσπαθούμε να σχεδιάσουμε σημεία τα οποία ξεπερνούν τα όρια συντεταγμένων της οθόνης, και αυτό συνήθως προξενεί το φαινόμενο της αναδίπλωσης.

Εικόνα 6: Η πλήρης κάτοψη ενός σχεδίου και η όψη του μέσα από ένα παράθυρο



Ο σωστός τρόπος για να διαλέξουμε την ορατή πληροφορία για εμφάνιση είναι να χρησιμοποιούμε ψαλίδισμα (clipping). Ψαλίδισμα ονομάζεται μια διαδικασία που διαιρεί κάθε στοιχείο της οθόνης σε ορατό και μη ορατό μέρος, επιτρέποντας την απόρριψη του δεύτερου. Το ψαλίδισμα μπορεί να εφαρμοστεί σε μια ποικιλία διαφορετικών τύπων στοιχείων όπως σημεία, γραμμές, καμπύλες διαφόρων ειδών, χαρακτήρες κειμένου, ακόμα και πολύγωνα. Η βάση για αυτές τις διαδικασίες είναι ένα απλό ζεύγος ανισοτήτων οι οποίες καθορίζουν πότε ένα σημείο (x, y) είναι ορατό:

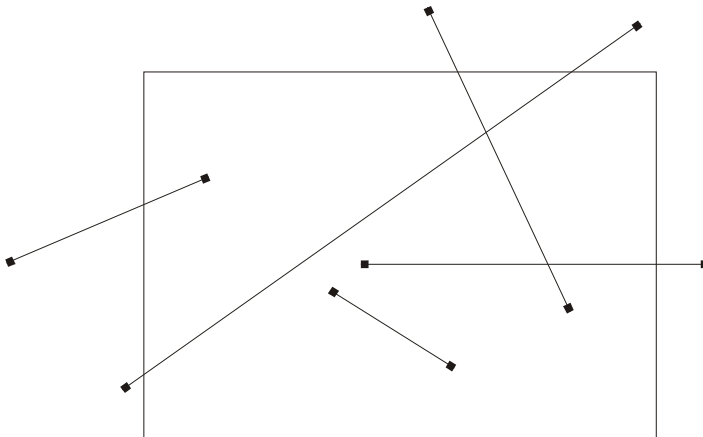
$$\begin{aligned}x_{\text{left}} < x < x_{\text{right}} \\ y_{\text{bottom}} < y < y_{\text{top}}\end{aligned}$$

όπου τα x_{left} , x_{right} , y_{bottom} και y_{top} είναι οι θέσεις των άκρων της οθόνης. Αυτές οι ανισότητες μας εφοδιάζουν με μια πολύ απλή μέθοδο για να ψαλιδίζουμε σημεία. Κάθε σημείο που ικανοποιεί αυτές τις ανισότητες είναι ορατό, αλλιώς απορρίπτεται.

Αν όμως μετατρέπουμε όλα τα στοιχεία της οθόνης σε σημεία και χρησιμοποιούμε προηγούμενες ανισότητες, εύκολα γίνεται κατανοητό ότι το υπολογιστικό κόστος της διαδικασίας φτάνει σε επίπεδα απαγορευτικά. Έτσι, πρέπει να προσπαθήσουμε να ψαλιδίσουμε πιο σύνθετα αντικείμενα της οθόνης. Αυτό απαιτεί τη δημιουργία ισχυρότερων αλγορίθμων ψαλιδίσματος, οι οποίοι μπορούν να βρουν το ορατό και το μη ορατό μέρος γραμμών, χαρακτήρων κειμένου και πολυγώνων. Στις επόμενες ενότητες εξετάζονται μερικοί αλγόριθμοι για το ψαλίδισμα γραμμών.

Αλγόριθμος των Sutherland - Cohen για Ψαλίδισμα Γραμμών

Το παρακάτω σχήμα δείχνει τις περισσότερες διαφορετικές θέσεις στις οποίες μια γραμμή μπορεί να τοποθετηθεί ως προς την οθόνη. Παρατηρήστε ότι αυτές οι γραμμές, που είναι μερικά ορατές, διαιρούνται από το περιθώριο της οθόνης σε ένα ή περισσότερα άορατα μέρη και μόνο ένα ορατό. Είναι εξαιρετικά χρήσιμο το γεγονός ότι καθώς ψαλιδίζουμε ως προς ένα κυρτό περιθώριο, όπως μια τετράγωνη οθόνη, ποτέ δεν δημιουργούνται περισσότερα από ένα ορατά τμήματα μιας γραμμής. Αυτό σημαίνει ότι το ορατό τμήμα της γραμμής μπορεί να καθοριστεί απλά υπολογίζοντας τα δύο άκρα του. Ο ακόλουθος αλγόριθμος, που οφείλεται στους I. Sutherland και D. Cohen, είναι σχεδιασμένος έτσι ώστε όχι μόνο να βρίσκει γρήγορα αυτά τα άκρα, αλλά και να απορρίπτει ακόμα πιο γρήγορα κάθε γραμμή που είναι εντελώς άορατη. Έτσι έχει πολύ καλές επιδόσεις στην περίπτωση που η εικόνα που ψαλιδίζουμε είναι πολύ μεγαλύτερη από την οθόνη.



Εικόνα 7: Διάφορες γραμμές που διαπερνούν τα όρια του ορατού παραθύρου

Ο αλγόριθμος αποτελείται από δύο τμήματα. Το πρώτο προσδιορίζει αν η γραμμή βρίσκεται ολόκληρη μέσα στην οθόνη και εάν όχι μπορεί απλά να απορριφθεί σαν εντελώς άορατη. Αν η γραμμή δεν ικανοποιεί κανένα από αυτά τα κριτήρια, τότε διαιρείται σε δύο τμήματα και τα δύο κριτήρια εφαρμόζονται σε κάθε τμήμα χωριστά. Ο αλγόριθμος βασίζεται στο γεγονός ότι κάθε γραμμή είτε βρίσκεται ολόκληρη μέσα στην οθόνη, είτε μπορεί να διαιρεθεί έτσι ώστε να είναι δυνατόν ένα τμήμα να απορριφθεί απλά.

Το κριτήριο απόρριψης μπορεί να υλοποιηθεί επεκτείνοντας τις πλευρές της οθόνης. Έτσι, η περιοχή που καταλαμβάνει ολό-

κληρη η εικόνα διαιρείται σε εννιά υποπεριοχές, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα. Κάθε μια από αυτές τις περιοχές χαρακτηρίζεται από έναν κώδικα μήκους 4 bits. Στα δύο άκρα της γραμμής αποδίδονται κώδικες ανάλογοι με τις περιοχές στις οποίες βρίσκονται. Τα 4 bits του κώδικα έχουν την ακόλουθη σημασιολογία:

- Πρώτο bit : Εάν έχει την τιμή 1, το σημείο βρίσκεται αριστερά από την αριστερή πλευρά της οθόνης
- Δεύτερο bit : Εάν έχει την τιμή 1, το σημείο βρίσκεται δεξιά από την δεξιά πλευρά της οθόνης
- Τρίτο bit : Εάν έχει την τιμή 1, το σημείο βρίσκεται κάτω από την κάτω πλευρά της οθόνης
- Τέταρτο bit : Εάν έχει την τιμή 1, το σημείο βρίσκεται πάνω από την πάνω πλευρά της οθόνης.

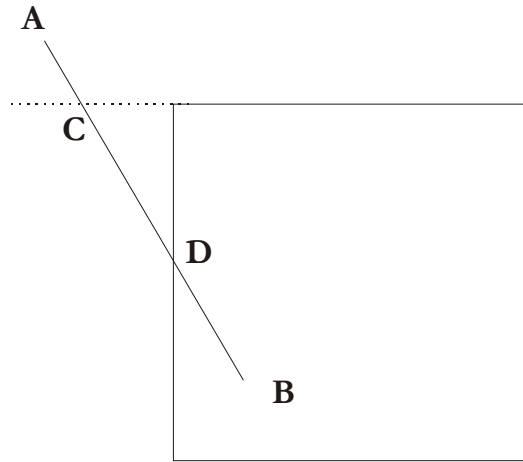
	1001	1000	1010
	Οθόνη		
	0001	0000	0010
	0101	0100	0110

Εικόνα 8: Ο κώδικας για καθεμιά από τις εννιά υποπεριοχές

Είναι φανερό ότι αν οι κώδικες και για τα δύο άκρα της γραμμής είναι ίσοι με μηδέν, η γραμμή βρίσκεται ολόκληρη μέσα στην οθόνη. Λιγότερο προφανές είναι το γεγονός ότι αν η λογική τομή των δύο κωδικών δεν ισούται με μηδέν, η γραμμή είναι εντελώς αόρατη.

Αν κανένα από τα προηγούμενα κριτήρια δεν ισχύει, τότε η γραμμή πρέπει να υποδιαιρεθεί. Μια απλή μέθοδος είναι η εξής: Βρίσκουμε το σημείο τομής της γραμμής με μια πλευρά της οθόνης και απορρίπτουμε το τμήμα που μένει έξω από αυτήν. Για παράδειγμα, η γραμμή AB στο διπλανό σχήμα μπορεί να υποδιαιρεθεί στο C και το τμήμα AC απορρίπτεται. Έτσι έχουμε μια νέα γραμμή CB, στην οποία εφαρμόζουμε τα απλά κριτήρια απόρριψης. Τα κριτήρια αποτυγχάνουν κι έτσι υποδιαιρούμε ξανά στο σημείο D. Αλλά τώρα η γραμμή BD βρίσκεται μέσα στην οθόνη. Δεν είναι πάντα εύκολο να καθοριστεί ποια υπο-

διαίρεση πρέπει να γίνει πρώτα, στο C ή στο D. Αν όμως εφαρμόσουμε το κριτήριο απόρριψης επαναληπτικά, η σειρά με την οποία γίνονται οι υποδιαιρέσεις δεν επηρεάζει το τελικό αποτέλεσμα.



Εικόνα 9: Κατάτμηση μιας γραμμής για να βρεθεί το ορατό τμήμα της

Αλγόριθμος Midpoint Subdivision

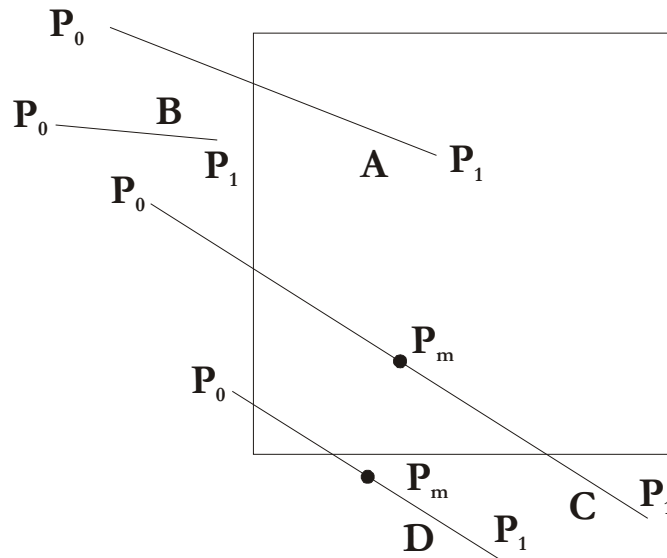
Μπορούμε να υποδιαιρέσουμε την εξεταζόμενη γραμμή στη μέση και έτσι να αποφύγουμε τον άμεσο υπολογισμό των σημείων τομής της γραμμής με τις πλευρές της οθόνης. Αυτή η μετατροπή είναι κατάλληλη για μηχανές χωρίς ειδικό hardware για πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις. Ας θεωρήσουμε μια γραμμή P_0P_1 – για να την ψαλιδίσουμε, αρκεί να βρούμε τα άκρα του ορατού τμήματός της. Κάθε άκρο του τμήματος αυτού υπολογίζεται από μια διαδικασία (στην υλοποίηση σε hardware οι δύο αυτές διαδικασίες γίνονται παράλληλα). Γενικά, ο στόχος της διαδικασίας είναι να βρει το ορατό σημείο στη γραμμή P_0P_1 που είναι μακρύτερα από το P. Τα βήματα αυτής της διεργασίας είναι τα ακόλουθα:

(α) Ελέγχουμε αν το P_1 είναι ορατό. Αν ναι, είναι το πιο απομακρυσμένο σημείο από το P_0 και η διαδικασία είναι πλήρης. Αν είναι αόρατο (γραμμές B, C και D στο παρακάτω σχήμα), τότε συνεχίζουμε.

(β) Ελέγχουμε εάν η P_0P_1 μπορεί να απορριφθεί απλά. Σε αυτήν την περίπτωση η διαδικασία είναι πλήρης και δεν δημιουργείται έξοδος (γραμμή B). Αλλιώς συνεχίζουμε.

(γ) Διαιρούμε το P_0P_1 στο μέσο του P_m . Το P_m μια εκτίμηση για το πιο απομακρυσμένο σημείο. Εάν το

τμήμα P_mP_1 μπορεί να απορριφθεί απλά, τότε κάνουμε υπερβολική εκτίμηση (γραμμή D) και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία από το βήμα (β), χρησιμοποιώντας το τμήμα P_0P_m . Αλλιώς, επαναλαμβάνουμε από το βήμα (β) με το τμήμα P_mP_1 (γραμμή C).



Εικόνα 10: Διάφορες περιπτώσεις υποψήφιων γραμμών

Ένα συγκεκριμένο παράδειγμα θα αποφηγήσει καλύτερα τον αλγόριθμο. Θεωρήστε το παράθυρο που ορίζεται από τα σημεία $(0, 0)$ και $(1023, 1023)$. Η γραμμή C έχει άκρα $P_1 = (-307, 631)$ και $P_2 = (820, -136)$ σε συντεταγμένες οθόνης. Οι κώδικες είναι (0001) για το P_1 και (0100) για το P_2 . Και οι δυο κώδικες είναι διάφοροι του μηδενός και επομένως η γραμμή δεν είναι εντελώς ορατή. Η λογική τομή των κωδικών είναι (0000) , άρα η γραμμή δεν μπορεί απλά να θεωρηθεί άορατη.

Ας υπολογίσουμε τις τομές. Οι συντεταγμένες του μέσου της γραμμής (χρησιμοποιώντας ακέραιη αριθμητική) είναι:

$$x_m = \frac{x_2 + x_1}{2} = \frac{820 - 307}{2} = 256.5 = 256$$

$$y_m = \frac{y_2 + y_1}{2} = \frac{-136 + 631}{2} = 247.5 = 247$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, ο κώδικας για το μέσο $P_m (256, 247)$ είναι (0000) . Ούτε το τμήμα P_1P_m ούτε το P_2P_m είναι τελείως ορατό ή τελείως άορατο. Αποθηκεύοντας το τμήμα P_2P_m (για να το χρησιμοποιήσουμε αργότερα) και συνεχίζοντας με το P_1P_m η διεργασία της υποδιαίρεσης προχωράει όπως φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

P_1	P_2	P_m	Σχόλια
-307,631	820,-136	256,247	Αποθηκεύουμε το $P_m P_2$
-307,631	256,247	-26,439	Συνεχίζουμε με το $P_m P_2$
-26,439	256,247	115,343	Συνεχίζουμε με το $P_1 P_m$
-26,439	115,343	44,391	Συνεχίζουμε με το $P_1 P_m$
-26,439	44,391	9,415	Συνεχίζουμε με το $P_1 P_m$
-26,439	9,415	-9,427	Συνεχίζουμε με το $P_m P_2$
-9,427	9,415	0,421	Επιτυχία
P_1	P_2	P_m	Σχόλια
256,247	820,-136	538,55	Ανακαλούμε το $P_m P_2$
538,55	820,-136	679,-41	Συνεχίζουμε με το $P_1 P_m$
538,55	679,-41	608,7	Συνεχίζουμε με το $P_m P_2$
608,7	679,-41	643,-17	Συνεχίζουμε με το $P_1 P_m$
608,7	643,17	625,-5	Συνεχίζουμε με το $P_1 P_m$
608,7	625,-5	616,1	Συνεχίζουμε με το $P_m P_2$
616,1	625,-5	620,-2	Συνεχίζουμε με το $P_1 P_m$
616,1	620,-2	618,-1	Συνεχίζουμε με το $P_1 P_m$
616,1	618,-1	617,0	Επιτυχία

Η ακριβής εξίσωση της γραμμής $P_1 P_2$ δίνει σημεία τομής με συντεταγμένες (0, 422) και (620, 0). Οι διαφορές οφείλονται στην χρήση αποκοπής.

Ψαλίδισμα Πολυγώνων

Γενικά, οι εικόνες περιέχουν κι άλλα είδη στοιχείων εκτός των γραμμών. Σχεδόν πάντα περιέχουν μερικούς αλφαριθμητικούς χαρακτήρες και συχνά περιλαμβάνουν κυκλικά τόξα ή άλλες καμπύλες. Ειδικές μέθοδοι έχουν εξελιχθεί για το ψαλίδισμα τέτοιων στοιχείων.

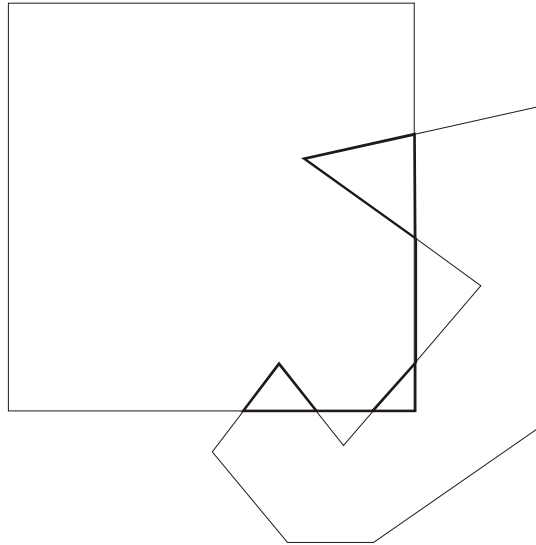
Οι χαρακτήρες συχνά ψαλιδίζονται με απλή παράλειψη κάθε χαρακτήρα που είναι μερικά ορατός. Το τεστ ορατότητας μπορεί να υλοποιηθεί ελέγχοντας την διαγώνιο του τετράπλευρου που περιλαμβάνει τον χαρακτήρα (bounding box): αν η διαγώνιος

είναι τελείως ορατή, ο χαρακτήρας εμφανίζεται, αλλιώς, παραλείπεται. Όταν χρειάζεται ακριβές ψαλίδισμα χαρακτήρων, οι χαρακτήρες μπορούν παρασταθούν σαν σύνολα από μικρά ευθύγραμμα τμήματα, το καθένα από τα οποία ψαλιδίζεται ως συνήθως. Παρόμοια μπορούμε να ψαλιδίσουμε καμπύλες μετατρέποντάς τις σε μικρά ευθύγραμμα τμήματα και να εφαρμόσουμε τις ήδη γνωστές διαδικασίες σε αυτά. Σχεδόν όλοι οι άλλοι τύποι στοιχείων μπορούν με παρόμοιο τρόπο να μετατραπούν σε ευθύγραμμα τμήματα και τότε μπορούν να ψαλιδιστούν με την βοήθεια του αλγόριθμου των Sutherland και Cohen.

Στην ειδική περίπτωση κατά την οποία η εικόνα αποτελείται από πολύγωνα, δημιουργούμε ένα περιθώριο το οποίο δεν είναι πια κλειστό: πρέπει να το κλείσουμε χρησιμοποιώντας κατάλληλα τμήματα του περιθωρίου της οθόνης, πράγμα που είναι αρκετά δύσκολο. Άλλο πρόβλημα δημιουργείται από τα μη κυρτά πολύγωνα, τα οποία μπορεί να ψαλιδιστούν σε μερικά μικρότερα πολύγωνα. Αυτά τα δυο προβλήματα εμποδίζουν το ψαλίδισμα πολυγώνων με τη μετατροπή του πολυγώνου σε ένα σύνολο γραμμών και τη χρήση κάποιου αλγόριθμου για ψαλίδισμα γραμμών. Έτσι καταφεύγουμε σε ειδικές λύσεις μια από τις οποίες θα εξετάσουμε στη συνέχεια.

Ο Αλγόριθμος των Sutherland και Hodgman για ψαλίδισμα πολυγώνων

Ο αλγόριθμος των Sutherland - Hodgman βασίζεται στην παρατήρηση ότι είναι σχετικά εύκολο να ψαλιδίσουμε ένα πολύγωνο ως προς μια πλευρά της οθόνης. Έτσι μπορούμε να ψαλιδίσουμε το πολύγωνο ως προς τις τέσσερις πλευρές της οθόνης ψαλιδίζοντάς το ολόκληρο ως προς μία πλευρά, στη συνέχεια παίρνουμε το ή τα εναπομείναντα πολύγωνα και τα ψαλιδίζουμε ως προς μια δεύτερη πλευρά, κλπ. Η προσέγγιση αυτή σε πρώτη ανάλυση φαίνεται να χρειάζεται ένα σημαντικό ποσό μνήμης για να διατηρεί τα ενδιάμεσα πολύγωνα που δημιουργούνται από τις πρώτες τρεις διαδικασίες ψαλιδίσματος. Εν τούτοις, ο αλγόριθμος απαιτεί χώρο μόνο για δύο ζεύγη συντεταγμένων για κάθε πλευρά που ψαλιδίζουμε.



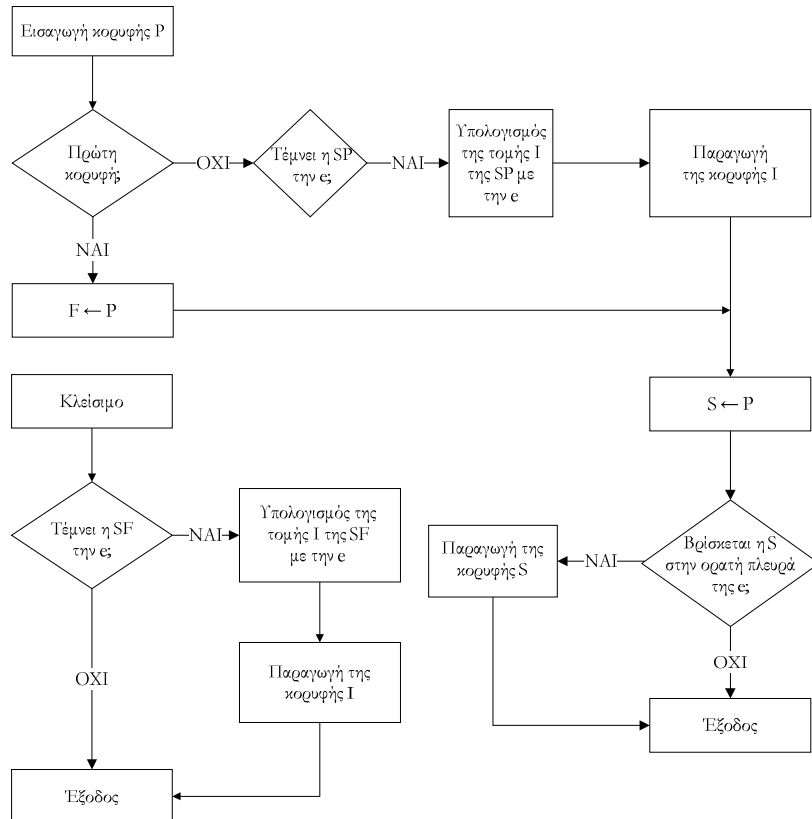
Εικόνα 11: Ψαλίδισμα ενός πολυγώνου

Ο αλγόριθμος εργάζεται περισσότερο στις κορυφές του πολυγώνου παρά στις ακμές του. Θα καλούμε τις κορυφές P_1, P_2, \dots, P_n . Οι n ακμές του πολυγώνου δημιουργούνται συνδέοντας την P_1 στην P_2 , την P_2 στην P_3 , κλπ. Το πολύγωνο κλείνει με την ακμή $P_n P_1$. Η έξοδος του αλγόριθμου είναι μια νέα ακολουθία από κορυφές Q_1, Q_2, \dots, Q_m . Θεωρούμε ότι αυτή η ακολουθία παριστάνει ένα πολύγωνο με m ακμές, αν και μπορεί εκ των πραγμάτων να αποτελείται από μερικά πολύγωνα που συνδέονται με εκφυλισμένες ακμές, όπως στο παράδειγμα του προηγούμενου σχήματος.

Ο αλγόριθμος των Sutherland - Hodgman ελέγχει κάθε κορυφή P_i ($i = 1, 2, \dots, n$) με τη σειρά ως προς μια πλευρά ψαλιδίσματος e . Κορυφές που βρίσκονται στην ορατή πλευρά της e συμπεριλαμβάνονται στο καινούριο, ορατό πολύγωνο που δημιουργεί ο αλγόριθμος, ενώ αόρατες κορυφές απορρίπτονται. Ο αλγόριθμος ελέγχει επίσης εάν η κορυφή P_i βρίσκεται στην ίδια πλευρά της e με την προηγούμενη κορυφή P_{i-1} . Αν όχι, το σημείο τομής της e με την ακμή $P_i P_{i-1}$ υπολογίζεται και προστίθεται στο πολύγωνο που αποτελεί την έξοδο. Το τελευταίο βήμα παραλείπεται για την πρώτη κορυφή P_1 : στο τέλος, όταν η P_n έχει ελεγχθεί, ο αλγόριθμος εξετάζει εάν η πλευρά e διασταυρώνεται με την ακμή $P_n P_1$.

Το επόμενο σχήμα δείχνει ένα διάγραμμα ροής του αλγόριθμου για το ψαλίδισμα κάθε κορυφής του πολυγώνου ως προς μια πλευρά e . Στο σχήμα αυτό κάθε κορυφή P (εκτός της πρώτης) θεωρείται η κατάληξη μιας ακμής από την προηγούμενη κορυφή S προς την P . Ο αλγόριθμος εμφανίζεται σε δυο τμήματα: το πρώτο εφαρμόζεται σε κάθε κορυφή, ενώ το δεύτερο είναι μια

ρουτίνα κλεισίματος, η οποία εφαρμόζεται μόνο μετά την επεξεργασία και της τελευταίας κορυφής του πολυγώνου. Σε μερικά σημεία ο αλγόριθμος παράγει στην έξοδο μια κορυφή. Έτσι, πρέπει να προσθέσουμε αυτή την κορυφή σε μια λίστα από κορυφές που παριστάνουν το ψαλιδισμένο πολύγωνο.



Εικόνα 12: Διάγραμμα ροής για το ψαλίδισμα πολυγώνων

Δυο σημεία χρειάζονται ιδιαίτερη προσοχή. Το πρώτο είναι ο έλεγχος της ορατότητας ενός σημείου $P(x, y)$ ως προς μια ευθεία e . Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα την ευθεία e με εξίσωση $x + 1 = 0$, ενώ θέλουμε να καθορίσουμε την ορατότητα των σημείων $P_2(2, 1)$ και $P_3(-2, 1)$ ως προς την e (υποθέτουμε ότι ορατό είναι το δεξιό ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ευθεία). Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες των σημείων στην εξίσωση της ευθείας έχουμε:

$$x_2 + 1 = 2 + 1 = 3 > 0$$

$$x_3 + 1 = -2 + 1 = -1 < 0$$

Επομένως, το P_2 είναι ορατό, ενώ το P_3 είναι άορατο. Δεν είναι δύσκολο να επεκταθεί αυτή η τεχνική για ευθείες που δεν είναι παράλληλες στους άξονες των συντεταγμένων.

Το δεύτερο ενδιαφέρον σημείο βρίσκεται στον υπολογισμό της τομής μιας ακμής $P_{i-1}P_i$ με μια ευθεία e . Γενικότερα, δυο γραμ-

μές με άκρα P_1, P_2 και P_3, P_4 αντίστοιχα, μπορούν να παρασταθούν με τις εξισώσεις:

$$P(s) = P_1 + (P_2 - P_1) s \quad \text{για } 0 \leq s \leq 1$$

$$P(t) = P_3 + (P_4 - P_3) t \quad \text{για } 0 \leq t \leq 1$$

όπου τα s, t είναι οι παράμετροι των ευθειών. Ο περιορισμός των τιμών από 0 έως το 1, μετατρέπει τις ευθείες σε ευθύγραμμα τμήματα. Στο σημείο τομής ισχύει εξ ορισμού $P(s) = P(t)$. Επειδή οι $P(s), P(t)$ είναι διανυσματικές συναρτήσεις, δηλαδή $P(s) = (x(s), y(s))$ και $P(t) = (x(t), y(t))$, η εξίσωση $P(s) = P(t)$ ισοδυναμεί με ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δυο αγνώστους, s και t . Με άλλα λόγια θα έχουμε $x(s) = x(t)$ και $y(s) = y(t)$ στο σημείο τομής. Εάν δεν υπάρχει λύση, τότε οι γραμμές είναι παράλληλες. Αν είτε το s , είτε το t βρίσκονται έξω από την απαιτούμενη περιοχή, τα τμήματα δεν τέμνονται.

Για παράδειγμα, θεωρούμε τα ευθύγραμμα τμήματα $P_1 (0,0)$ ως $P_2 (3,2)$ και $P_3 (3,0)$ ως $P_4 (0,2)$. Τότε

$$P(s) = (0, 0) + (3, 2) s$$

$$P(t) = (3, 0) + (-3, 2) t$$

Εξισώνοντας τα μέρη των x και y παίρνουμε:

$$2s = 3 - 3t \quad \text{και} \quad 2s = 2t$$

Η λύση είναι $s = t = 1/2$, οπότε το σημείο τομής είναι

$$P(s) = (0, 0) + (3, 2) \cdot 1/2 = (3/2, 1)$$

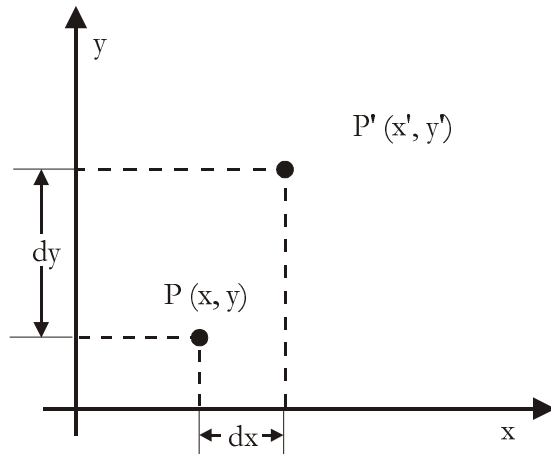
Για να ψαλιδίσουμε το πολύγωνο ως προς τέσσερις συνεχόμενες πλευρές, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε μια ακολουθία τεσσάρων βημάτων, χρησιμοποιώντας το πολύγωνο που αποτελεί την έξοδο κάθε βήματος και τροφοδοτώντας τις κορυφές του σαν είσοδο του επόμενου βήματος. Το τελικό αποτέλεσμα θα είναι να ψαλιδίσουμε το πολύγωνο ως προς τις πλευρές της οθόνης. Έχουμε δει όμως, ότι μια μεγάλη ποσότητα μνήμης μπορεί να καταναλωθεί για να αποθηκεύσει τα ενδιάμεσα πολύγωνα. Μπορούμε επίσης να δούμε ότι δεν χρειαζόμαστε τόση μνήμη. Ο αλγόριθμος παράγει στην έξοδο σειριακά τις κορυφές του νέου πολυγώνου και τότε τροφοδοτεί με αυτές τις κορυφές το επόμενο βήμα της διαδικασίας, με την ίδια σειρά. Έτσι, αντί να αποθηκεύσουμε κάθε κορυφή που παράγεται μέχρι να ολοκληρωθεί το βήμα, μπορούμε να την μεταδώσουμε κατευθείαν στο

επόμενο εκτελώντας αναδρομικά τον ίδιο αλγόριθμο. Τότε η πλήρης διαδικασία ψαλιδίσματος αποτελείται από τέσσερα στάδια του ίδιου αλγόριθμου, το καθένα από τα οποία ψαλιδίζει ως προς μια από τις τέσσερις πλευρές της οθόνης. Οι κορυφές που παράγονται από το πρώτο βήμα μεταδίδονται στο δεύτερο, κλπ. Οι κορυφές που παράγει το τελευταίο βήμα αποτελούν το τελικό ψαλιδισμένο πολύγωνο.

Μετασχηματισμοί

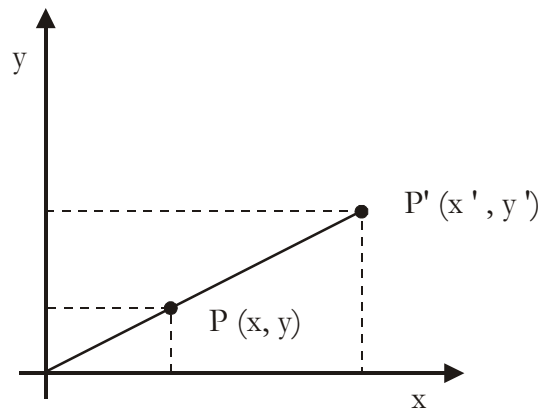
Μέχρι τώρα είδαμε μια αρκετά γρήγορη και ακριβή μέθοδο για να ζωγραφίζουμε ευθείες ή καμπύλες γραμμές με δεδομένα αρχικά και τελικά σημεία. Ας υποθέσουμε όμως ότι θέλουμε να μετακινήσουμε ή να περιστρέψουμε κάποιες ήδη υπάρχουσες γραμμές. Η περιστροφή (rotation), η μεταφορά (translation) και η μεγέθυνση (scaling) μιας γραμμής λέγονται γενικά μετασχηματισμοί (transformations). Πρέπει λοιπόν να βρούμε μια σχέση που να μας δίνει τα νέα ακραία σημεία των γραμμών σε συνάρτηση των παλιών σημείων και των μεγεθών που χαρακτηρίζουν τους μετασχηματισμούς.

Η μεταφορά είναι η πιο απλή από μαθηματική άποψη διαδικασία μετασχηματισμού μιας γραμμής. Αν λοιπόν θέλουμε να μεταφέρουμε μια γραμμή κατά Δx ως προς τον οριζόντιο άξονα και κατά Δy κατά τον κατακόρυφο, αρκεί να προσθέσουμε αλγεβρικά αυτές τις τιμές στα δεδομένα ακραία σημεία και να σχεδιάσουμε τη νέα γραμμή που προκύπτει. Μπορούμε να αποδείξουμε πως αυτή η διαδικασία θα μας δώσει τα ίδια σημεία που θα παίρναμε αν μετασχηματίζαμε ένα προς ένα τα σημεία της αρχικής γραμμής. Είναι όμως ασύγκριτα πιο γρήγορη από αυτήν και εκτός αυτού μπορεί να γραφεί με συμπαγή τρόπο σε μορφή πινάκων: $P' = P + T$, όπου $P = [x \ y]^T$ είναι ο πίνακας με τα παλιά ακραία σημεία, $P' = [x' \ y']^T$ ο πίνακας με τα νέα ακραία της γραμμής και $T = [\Delta x \ \Delta y]^T$ ο πίνακας που περιγράφει τη μεταφορά.



Εικόνα 13: Μετασχηματισμός μεταφοράς ενός σημείου

Αντίστοιχα, η μεγέθυνση σε μορφή πινάκων ορίζεται σαν $P' = S \cdot P$, όπου $S = \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix}$ είναι ο πίνακας που περιέχει τους συντελεστές κατά τους οποίους μεγεθύνουμε τα πολύγωνα μας ως προς x και y αντίστοιχα. Αν ισχύει $S_x \neq S_y$ τότε έχουμε διαφορική μεγέθυνση και τα πολύγωνα μας χάνουν τις αρχικές τους αναλογίες. Εδώ πρέπει να τονίσουμε ότι ο μετασχηματισμός γίνεται ως προς την αρχή των αξόνων, πράγμα που σημαίνει ότι αν $S_x, S_y > 0$ τα πολύγωνα που μεγεθύνουμε απομακρύνονται από αυτήν, ενώ στην αντίθετη περίπτωση (σμίκρυνση) την πλησιάζουν, αφού τώρα ελαττώνουμε το μέτρο των ακραίων σημείων των πολυγώνων.



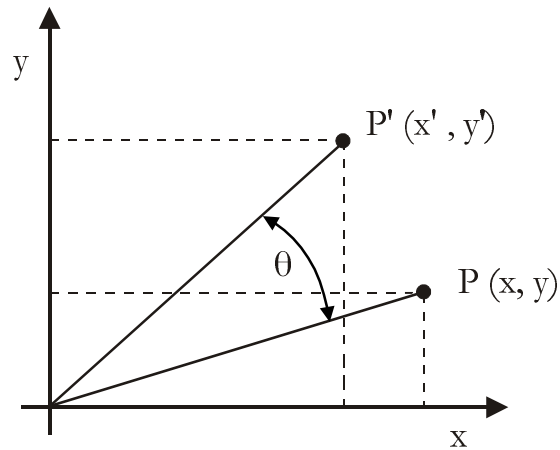
Εικόνα 14: Μετασχηματισμός μεγέθυνσης

Η περιστροφή μιας γραμμής μπορεί να οριστεί με βάση τις εξισώσεις των σημείων ενός κύκλου, αφού περιστρέφοντας ένα σημείο ως προς την αρχή των αξόνων ουσιαστικά μετακινούμε τα ακραία σημεία του πάνω στον κύκλο με ακτίνα ίση με το μέτρο του αντίστοιχου διανύσματος θέσης. Έτσι έχουμε:

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$y' = y \cos \theta + x \sin \theta$$

$$\text{ή αλλιώς } P' = R \cdot P, \text{ όπου } R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$



Εικόνα 15: Η περιστροφή γίνεται ως προς την αρχή των αξόνων και σύμφωνα με τη θετική φορά

Ομογενείς συντεταγμένες - σύνθεση μετασχηματισμών

Όπως είδαμε παραπάνω, μπορούμε να εκφράσουμε τους μετασχηματισμούς που θέλουμε να εφαρμόσουμε πάνω σε κάποια σημεία ή διανύσματα σαν άθροισμα ή γινόμενο πινάκων. Θα ήταν πολύ πρακτικό, αν μπορούσαμε να εκφράσουμε τους μετασχηματισμούς με ενιαίο τρόπο, δηλαδή με την ίδια πράξη πινάκων. Για το λόγο αυτό εισάγουμε στην έκφραση κάθε σημείου και μια τρίτη μη μηδενική συντεταγμένη W . Έτσι, το τυχαίο σημείο $P(x, y)$ τώρα γίνεται $P(xW, yW, W)$ και η νέα αυτή έκφραση δίνει τις ομογενείς συντεταγμένες του σημείου. Η έκφραση αυτή δεν είναι μονοσήμαντη, καθώς το W μπορεί να παίρνει τυχαίες πραγματικές τιμές, δηλαδή οι τριάδες $A(x, y, 1)$, $B(2x, 2y, 2)$ και $\Gamma(3x, 3y, 3)$ παριστάνουν όλες το ίδιο σημείο.

Χρησιμοποιώντας τώρα την παραπάνω σύμβαση μπορούμε να εκφράσουμε τους πίνακες των μετασχηματισμών με μια νέα μορφή :

$$T(dx, dy) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S(Sx, Sy) = \begin{bmatrix} Sx & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και αντίστοιχα τους μετασχηματισμούς ως:

$$P' = T(dx, dy) \cdot P \text{ (μεταφορά)}$$

$$P' = S(S_x, S_y) \cdot P \text{ (μεγέθυνση)}$$

$$P' = R(\theta) \cdot P \text{ (περιστροφή)}$$

Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι η διαδοχική μεταφορά ενός σημείου μπορεί να εκφραστεί σαν ένας συνολικός μετασχηματισμός, αν χρησιμοποιήσουμε τον αντίστοιχο πίνακα – άθροισμα των επιμέρους πινάκων μεταφοράς. Δηλαδή αν

$$P' = P * T(\Delta x_1, \Delta y_1) \text{ και } P'' = P' * T(\Delta x_2, \Delta y_2)$$

τότε $P'' = P * T(\Delta x_1 + \Delta x_2, \Delta y_1 + \Delta y_2)$. Αυτή η διαδικασία λέγεται σύνθεση μετασχηματισμών (composition) και μπορεί να απλοποιηθεί και να επιταχύνει αρκετά τους υπολογισμούς μας. Όσον αφορά τη μεγέθυνση, η σύνθεση εδώ είναι πολλαπλασιαστική, δηλαδή ο τελικός πίνακας με τον οποίο θα μετασχηματίσουμε το σημείο ή το διάνυσμα που μας ενδιαφέρει θα είναι το γινόμενο των επιμέρους πινάκων μεγέθυνσης, ενώ για την περιστροφή ισχύει ότι και για τη μεταφορά (έχουμε δηλαδή αθροιστική σύνθεση).

Τα παραπάνω ισχύουν όταν έχουμε διαδοχικούς μετασχηματισμούς του ίδιου τύπου, μπορούν όμως να επεκταθούν και στην εφαρμογή διαφορετικών μετασχηματισμών σε ένα σύνολο σημείων. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να περιστρέψουμε ένα πολύγωνο γύρω από ένα τυχαίο σημείο P. Είδαμε πριν ότι ο πίνακας περιστροφής που ορίσαμε εφαρμόζεται για την περιστροφή γύρω από την αρχή των αξόνων. Έτσι, για να πραγματοποιήσουμε το σκοπό μας πρέπει να μεταφέρουμε το P(x, y) στην αρχή των αξόνων, να κάνουμε την περιστροφή και τέλος να μεταφέρουμε το σημείο P στην αρχική του θέση. Κάνοντας τις αναγκαίες πράξεις βλέπουμε ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε αυτήν την ακολουθία μετασχηματισμών με το γινόμενο των τριών επιμέρους πινάκων, δηλαδή τον πίνακα $M = T(-x, -y) * R(\theta) * T(x, y)$.

Η σύνθεση αυτή γενικά θα δημιουργήσει έναν πίνακα της μορφής

$$M = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Εφαρμόζοντας τελικά το συνολικό μετασχηματισμό θα έχουμε τις νέες συντεταγμένες $P(x', y')$ με

$$x' = x \cdot r_{11} + y \cdot r_{21} + t_x \text{ και } y' = x \cdot r_{12} + y \cdot r_{22} + t_y$$

δίνοντάς μας το ζητούμενο αποτέλεσμα με μόνο τέσσερις πολλαπλασιασμούς και τέσσερις προσθέσεις. Έτσι αν κάνουμε απευθείας τις οκτώ αυτές πράξεις μειώνουμε κατά πολύ τον υπολογιστικό φόρτο για το μετασχηματισμό ενός σημείου. Επίσης, στην περίπτωση που θέλουμε τα πολύγωνα μας να περιστρέφονται συνέχεια και ανά λίγες μοίρες σε κάθε βήμα, μπορούμε να μειώσουμε τους χρονοβόρους πολλαπλασιασμούς, αν αντικαταστήσουμε τις γνωστές εκφράσεις για την περιστροφή με τις εξισώσεις :

$$x' = x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta$$

$$y' = x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta$$

όπου κάναμε την παραδοχή ότι αφού η γωνία θ είναι πού μικρή το $\cos\theta$ πλησιάζει τη μονάδα. Το πρόβλημα εδώ είναι ότι μεγάλώνει το σφάλμα στους υπολογισμούς, που υπάρχει έτσι κι αλλιώς αφού η ακρίβεια έκφρασης των τριγωνομετρικών μεγεθών είναι πεπερασμένη. Μια ικανοποιητική λύση είναι να κρατάμε πάντα στη μνήμη του υπολογιστή ένα αντίγραφο των αρχικών συντεταγμένων των σημείων και μετά από κάθε πλήρη κύκλο του πολυγώνου να διορθώνουμε τους υπολογισμούς μας.

Μια ακόμα απλοποίηση που είναι αποτέλεσμα του ενιαίου τρόπου έκφρασης των μετασχηματισμών είναι και η εναλλαγή στη σειρά εφαρμογής. Γενικά, ο πολλαπλασιασμός πινάκων δεν είναι αντιμεταθετική πράξη, όταν όμως έχουμε μετασχηματισμούς ίδιου τύπου ή περιστροφή και μη διαφορική μεγέθυνση η σειρά εφαρμογής τους δεν επιφέρει καμιά διαφορά στο αποτέλεσμα.

Μετασχηματισμοί τριών διαστάσεων

Όσα είδαμε παραπάνω για τους μετασχηματισμούς στο επίπεδο μπορούν να επεκταθούν και σε αντίστοιχες λειτουργίες στο χώρο. Πρώτα όμως πρέπει να ορίσουμε το σύστημα συντεταγμένων μας: διαλέγουμε αυτό που προκύπτει με τον κανόνα του δεξιού

χεριού, δηλαδή ορίζουμε σαν θετική φορά περιστροφής αυτή με την οποία αν κοιτάξουμε κατά μήκος ενός θετικού άξονα προς την αρχή των συντεταγμένων, μια περιστροφή κατά 90° θα μετασχηματίσει τον έναν άξονα στον άλλο ($x \rightarrow y \rightarrow z$). Για τους νέους πίνακες μετασχηματισμών απλά προσθέτουμε μια νέα γραμμή που να αντιστοιχεί στον άξονα z , δηλαδή έχουμε:

$$T(dx, dy, dz) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S(Sx, Sy, Sz) = \begin{bmatrix} Sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(περιστροφή γύρω από τον άξονα x)

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(περιστροφή γύρω από τον άξονα y)

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(περιστροφή γύρω από τον άξονα z)

Εδώ ισχύουν όσα και παραπάνω για το θέμα της σύνθεσης και της αύξησης της ταχύτητας, με μια επιπλέον παρατήρηση: οι σύνθετοι πίνακες περιστροφής είναι ορθογώνιοι, δηλαδή οι στήλες τους είναι διανύσματα ανά δύο κάθετα μεταξύ τους. Αυτό σημαίνει απλά ότι ο αντίστροφος ενός τέτοιου πίνακα είναι ο ανάστροφός του, δηλαδή ο πίνακας που προκύπτει αν εναλλάξουμε τις στήλες με τις γραμμές του. Άρα, για τον υπολογισμό

ενός τέτοιου πίνακα δε χρειάζεται παρά ελάχιστη υπολογιστική προσπάθεια. Μια άλλη χρήσιμη παρατήρηση είναι το ότι η τιμή της ορίζουσας ενός - σύνθετου ή όχι - πίνακα μετασχηματισμού μας δίνει μια ιδέα της μεταβολής που αυτός θα επιφέρει στα πολύγωνα μας. Αυτό σημαίνει ότι αν μια τέτοια ορίζουσα είναι ίση με τη μονάδα, θα αφήσει αμετάβλητο το εμβαδόν του πολυγώνου, αν πρόκειται για δισδιάστατο μετασχηματισμό, ή τον όγκο του αντικειμένου, αν έχουμε μετασχηματισμό στο χώρο. Σε αντίθετη περίπτωση, όπως για παράδειγμα στη διαφορική μεγέθυνση, θα έχουμε μεταβολή των παραπάνω μεγεθών. Ακόμα, αν ο υποπίνακας 2×2 του σύνθετου πίνακα που αποτελείται από τα στοιχεία r_{ij} είναι ορθογώνιος, τότε ο συνολικός μετασχηματισμός που εκφράζει διατηρεί τα μήκη και τις γωνίες των διανυσμάτων πάνω στα οποία εφαρμόζεται. Έτσι, για παράδειγμα, ένα τετράγωνο που θα μετασχηματιστεί με έναν τέτοιο πίνακα θα παραμείνει τετράγωνο, ενώ σε αντίθετη περίπτωση θα γίνει ρόμβος.

Ο χώρος των ομογενών συντεταγμένων

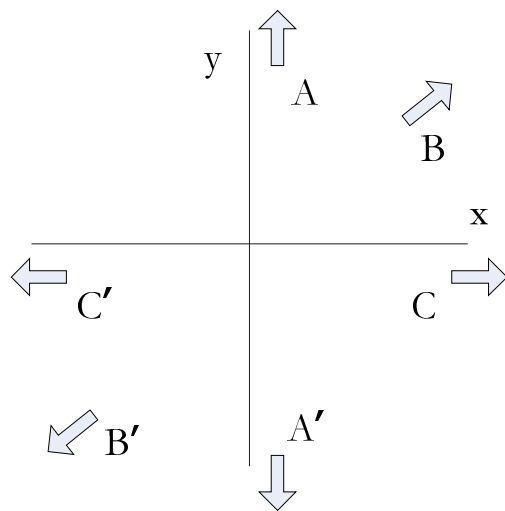
Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό της αναπαράστασης ενός σημείου στο χώρο με ομογενείς συντεταγμένες είναι ότι περισσότερες από μια τετράδες συντεταγμένων απεικονίζονται στο ίδιο σημείο του χώρου. Αυτό σημαίνει γιατί αν ένα σημείο στο χώρο ορίζεται σαν (X, Y, Z) και ένα τετρανύσμα στον ομογενή χώρο σαν (x, y, z, w) θα ισχύει η σχέση

$$(X, Y, Z) = (x/w, y/w, z/w)$$

Αν και η αναπαράσταση με τετρανύσματα είναι απόλυτα συμβατή με αυτήν των πινάκων, κάποια στιγμή μετά το τέλος της επεξεργασίας θα πρέπει να την μετατρέψουμε στη συνηθισμένη αναπαράσταση με τις πραγματικές συντεταγμένες στο χώρο, έτσι ώστε να εμφανίσουμε τα τελικά σημεία στην οθόνη. Αν μείνουμε προς το παρόν στην παραπάνω αναπαράσταση του ομογενούς χώρου, τότε βλέπουμε ότι μας προσφέρουν μια απόλυτα δομημένη μέθοδο για την αναπαράσταση και την επεξεργασία σημείων που βρίσκονται σε άπειρη απόσταση σε σχέση με τη σκηνή. Ας θεωρήσουμε ένα σημείο που βρίσκεται πάνω στον ομογενή άξονα x , έστω το $(1, 0, 0, w)$, το οποίο σύμφωνα με όσα είπαμε παραπάνω απεικονίζεται στο σημείο $(1/w, 0, 0)$ στον τρισδιάστατο χώρο. Αν αρχίσουμε και μειώνουμε την τιμή του w , τότε το σημείο μας αρχίζει και απομακρύνεται από την αρχή των $a-$

ξόνων. Όταν το w γίνει ίσο με το μηδέν, τότε θα έχουμε ένα σημείο που βρίσκεται σε άπειρη απόσταση στο χώρο, ενώ η αναπαράστασή του στον ομογενή χώρο θα είναι απλά $(1, 0, 0, 0)$ – μπορούμε λοιπόν να μιλήσουμε για ένα υπερεπίπεδο $w=0$, το οποίο βρίσκεται στο άπειρο. Προφανώς, δεν είναι δυνατό να απεικονιστεί αυτό το επίπεδο με σημεία του τρισδιάστατου χώρου, καθώς δεν είναι δυνατό να διαιρέσουμε με το μηδέν, αλλά μπορούμε να επεξεργαστούμε τέτοια σημεία όσο τα αφήνουμε στη μορφή $(x, y, z, 0)$.

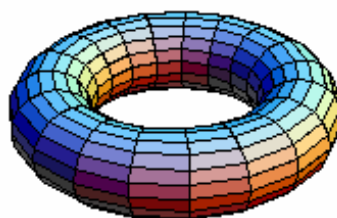
Είδαμε τι συμβαίνει όταν το w πλησιάζει και γίνεται ίσο με το μηδέν. Αν τώρα το w περάσει από την αρχή των αξόνων και βρεθεί στην πλευρά των αρνητικών συντεταγμένων, π.χ. γίνει ίσο με -0.1 , το αντίστοιχο σημείο στο χώρο θα μεταφερθεί στο $(-10, 0, 0)$. Αν φανταστούμε την πορεία του πραγματικού σημείου καθώς το w ακολουθεί αυτήν την πορεία, τότε προκύπτει ότι ο πραγματικός χώρος «διπλώνει» στο άπειρο και ξαναγυρνά από τις αρνητικές τιμές του άξονα. Αυτό γίνεται πιο προφανές, αν θεωρήσουμε ότι το σημείο $(1, 0, 0, 0)$ που βρίσκεται στο άπειρο από τις θετικές τιμές, ταυτίζεται ουσιαστικά με το $(-1, 0, 0, 0)$ που βρίσκεται εκεί από τις αρνητικές τιμές. Αν εφαρμόσουμε τα ίδια και στους άλλους πραγματικούς άξονες, τότε προκύπτει ότι τα σημεία που απομακρύνονται προς τα πάνω, «διπλώνουν» από την κάτω πλευρά των πραγματικών συντεταγμένων (αρνητικός ημιάξονας y).



Εικόνα 16: Πορεία των σημείων προς το άπειρο

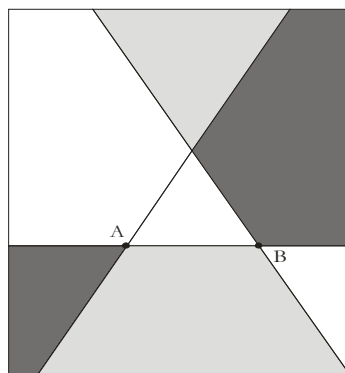
Αν προσπαθήσουμε να φανταστούμε αυτόν το χώρο, ίσως παρουσιαστούμε στην παρατήρηση ότι ταυτίζεται με έναν τόρο, όπως αυτός που ιδεατά σχηματίζεται από την υπερχείλιση (overflow) των προσημασμένων ακεραίων (θυμηθείτε ότι καθώς ένας τέτοιος κέραιος αυξάνεται, αν το πρώτο σε σημαντικότητα bit

γίνει ίσο με τη μονάδα, τότε μετατρέπεται αυτόματα σε αρνητικό).



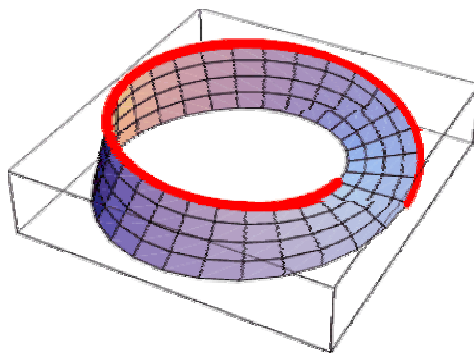
Εικόνα 17: Η εικόνα ενός τόρου περιστρεμμένου κατά τον άξονα y

Για να γίνει περισσότερο κατανοητή η μορφή του ομογενούς χώρου, ας μελετήσουμε την παρακάτω εικόνα, με την παρατήρηση ότι τα τρίγωνα «διπλώνουν» στο άπειρο στη θέση με την ίδια σκίαση. Για παράδειγμα, το τρίγωνο στο κάτω δεξιά μέρος, δηλαδή στο τμήμα του χώρου προς τα θετικά x και τα αρνητικά y «διπλώνει» στο πάνω δεξιά, δηλαδή στα αρνητικά x και τα θετικά y .



Εικόνα 18: Η σχέση των σημείων του πραγματικού χώρου ως προς την ομογενή αναπαράσταση

Στην πραγματικότητα λοιπόν, ο χώρος «διπλώνει» όπως ένα ύφασμα καθώς τα σημεία μας κατευθύνονται στο άπειρο. Αυτός ο τοπολογικός χώρος ονομάζεται λωρίδα Moebius:



Εικόνα 19: Μια επιφάνεια (λωρίδα) Moebius

Η γραμμή που ξεκινά από το πάνω μέρος της επιφάνειας και φαίνεται να διπλώνει στο κάτω, είναι το γενικευμένο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα δύο σημεία A και B . Στην πραγματικότητα

τα, αυτό το τμήμα χωρίζεται στο εσωτερικό του κομμάτι και στο εξωτερικό, που είναι και το πιο ενδιαφέρον: αυτό ξεκινά από το B, κατευθύνεται προς το άπειρο και «διπλώνει» εκεί για να κατευθυνθεί προς το A.

Οι μετασχηματισμοί σαν αλλαγή συστήματος συντεταγμένων

Μέχρι τώρα είδαμε τους μετασχηματισμούς σαν εργαλείο αλλαγής των συντεταγμένων κάποιου σημείου ή διανύσματος μέσα στα πλαίσια ενός σταθερού και αναλλοίωτου συστήματος συντεταγμένων. Ένας εναλλακτικός ορισμός είναι να δούμε τους μετασχηματισμούς σαν μια αλλαγή στο ίδιο το σύστημα που είναι εκφρασμένες οι συντεταγμένες όλων των σημείων μας. Κάτι τέτοιο μας είναι πολύ χρήσιμο στην περίπτωση που έχουμε διαφορετικά σχήματα - πολύγωνα, το καθένα με το δικό του σύστημα συντεταγμένων και θέλουμε να τα συνδυάσουμε σε ένα κοινό σύστημα, το οποίο ονομάζουμε παγκόσμιο σύστημα συντεταγμένων (world coordinate system - WCS) σε αντίθεση με τα τοπικά (local) συστήματα.

Ας ορίσουμε ως $M_{i \leftarrow j}$ το μετασχηματισμό των συντεταγμένων ενός σημείου από ένα σύστημα j σε ένα σύστημα i και έστω P_i οι συντεταγμένες του στο τυχαίο αυτό σύστημα. Τότε θα έχουμε: $P_i = M_{i \leftarrow j} P_j$ και $P_j = M_{j \leftarrow k} P_k$, το οποίο με τη σειρά του δίνει $P_i = M_{i \leftarrow j} P_j = M_{i \leftarrow j} M_{j \leftarrow k} P_k = M_{i \leftarrow k} P_k$ ή $M_{i \leftarrow k} = M_{i \leftarrow j} M_{j \leftarrow k}$. Εδώ βέβαια ισχύει ότι $M_{i \leftarrow j} = M_{i \leftarrow j}^{-1}$. Μια εφαρμογή των παραπάνω είναι και ο πίνακας για αλλαγή από δεξιόστροφα σε αριστερόστροφα συστήματα συντεταγμένων :

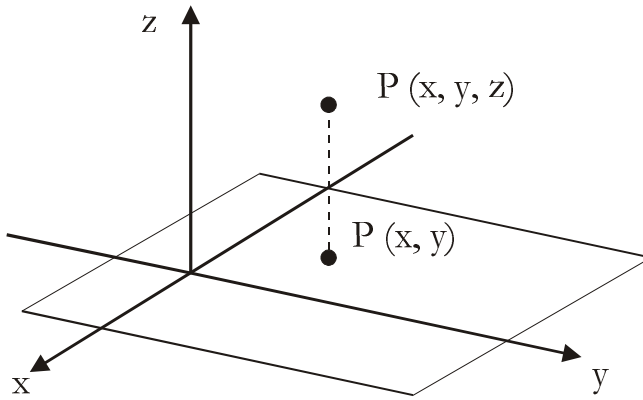
$$M_{R \leftarrow L} = M_{L \leftarrow R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε ουσιαστικά να θεωρήσουμε ότι ορίζουμε κάθε πολύγωνο στο δικό του τοπικό σύστημα συντεταγμένων και μετά το μετασχηματίζουμε, υπολογίζοντας ξανά τις συντεταγμένες του στο παγκόσμιο σύστημα συντεταγμένων.

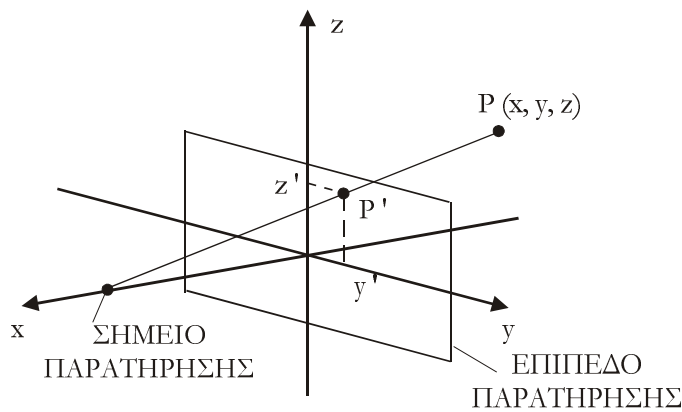
Προβολές

Έχουμε συνηθίσει να μιλάμε για τρισδιάστατα γραφικά σε υπολογιστές, ξεχνώντας ότι το πιο διαδεδομένο μέσο εξόδου, η οθόνη, μας δίνει τη δυνατότητα απεικόνισης μόνο δύο διαστάσεων. Χρειάζεται λοιπόν να βρούμε ένα τρόπο να μετατρέπουμε τις τρισδιάστατες αναπαραστάσεις των αντικειμένων που δημιουργούμε (τα μοντέλα τους δηλαδή) σε μια μορφή που να μπορεί να παρουσιαστεί στις συσκευές εξόδου που έχουμε και με την οποία ταυτόχρονα να μη χάνουμε την αίσθηση του όγκου των αντικειμένων μας. Αυτό που χρειαζόμαστε δηλαδή είναι να αφαιρέσουμε κατά κάποιο τρόπο μια από τις τρεις διαστάσεις, προβάλλοντας τον τρισδιάστατο χώρο στο δισδιάστατο επίπεδο. Μια γενική τεχνική για να γίνει αυτό είναι να προβάλλουμε ένα προς ένα τα άκρα των διανυσμάτων που απαρτίζουν τα πολύγωνα μας και μετά να σχεδιάσουμε τις ευθείες που συνδέουν αυτές τις προβολές. Ας δούμε τώρα κάποια πιο συγκεκριμένα είδη προβολών :

Παράλληλη (ορθοκανονική) προβολή: αυτό το είδος προβολής είναι αυτό που συναντάται πιο συχνά σε εφαρμογές αρχιτεκτονικού ή μηχανολογικού σχεδίου, μια που δίνει τις περισσότερες φορές με απλό υπολογιστικά τρόπο μια σαφή εικόνα της γεωμετρίας ενός αντικειμένου. Ας υποθέσουμε ότι το επίπεδο xy είναι το επίπεδο παρατήρησης (viewplane), δηλαδή αυτό πάνω στο οποίο θα σχεδιάσουμε το δισδιάστατο πια σχήμα μας. Κάθε ένα από τα ζητούμενα σημεία υπολογίζεται αν χαράξουμε μια παράλληλη προς τον άξονα z νοητή γραμμή από αυτό προς το επίπεδο παρατήρησης. Αυτό ισοδυναμεί με την προβολή του σημείου $P(x, y, z)$ του χώρου στο σημείο $P'(x, y)$ του επιπέδου xy . Είναι εύκολο να δείξουμε ότι ευθείες γραμμές στο χώρο προβάλλονται σε ευθείες γραμμές στο επίπεδο και ότι οι προβολές δύο ευθειών παράλληλων στο χώρο είναι κι αυτές παράλληλες. Με την ίδια λογική μπορούμε να ορίσουμε σαν επίπεδο παρατήρησης οποιοδήποτε από όσα ορίζονται από τους κύριους άξονες, αρκεί βέβαια να παραλείψουμε μετά την αντίστοιχη μεταβλητή.



Εικόνα 20: Η παράλληλη προβολή ενός σημείου



Εικόνα 21: Η προοπτική προβολή ενός σημείου

Προοπτική προβολή: αυτό το είδος προβολής είναι πιο συνηθισμένο, αν και πιο πολύπλοκο μαθηματικά, αφού ικανοποιεί περισσότερο την ανθρώπινη διαίσθηση για τα αντικείμενα του χώρου. Εδώ, εκτός από το επίπεδο παρατήρησης, χρειαζόμαστε και άλλη μια παράμετρο, το σημείο παρατήρησης (eye), από το οποίο χαράζουμε και πάλι νοητές γραμμές και σχεδιάζουμε τα ίχνη τους πάνω στο επίπεδο παρατήρησης. Από τα παραπάνω γίνεται προφανές ότι όλες αυτές οι νοητές γραμμές δεν είναι παράλληλες, αλλά συγκλίνουν στο σημείο παρατήρησης και ας υποθέσουμε λοιπόν πως αυτό βρίσκεται στο σημείο $(E, 0, 0)$. Μια νοητή ευθεία από το σημείο παρατήρησης προς ένα τυχαίο σημείο $P(x, y, z)$ του χώρου έχει τη μορφή

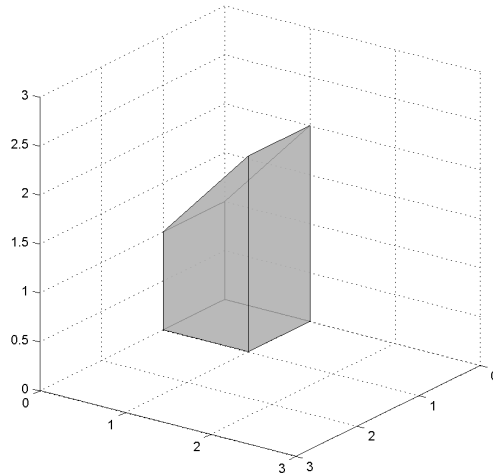
$$r(t) = (E, 0, 0) (1 - t) + (x, y, z) * t$$

και διασταυρώνεται με το επίπεδο παρατήρησης, έστω το επίπεδο $x=0$ όταν $t' = 1/(1-x/E)$. Αν θεωρήσουμε ότι $x > E$, έτσι ώστε το σημείο P να βρίσκεται μπροστά από το σημείο παρατήρησης, η παραπάνω έκφραση για την παράμετρο t είναι θετική και μέσω της εξίσωσης της ευθείας προκύπτει ότι το ζητούμενο σημείο έχει συντεταγμένες που δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

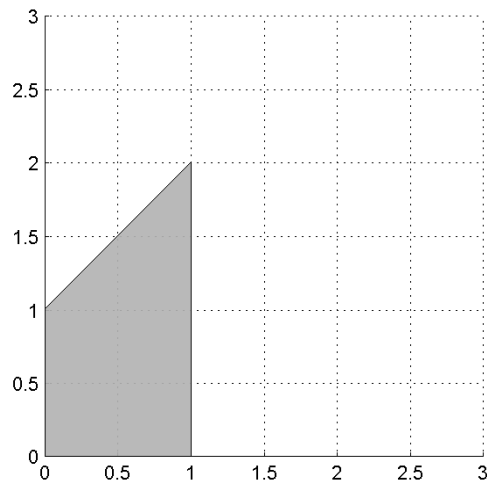
$$y' = y/(1-x/E)$$

$$z' = z/(1-x/E)$$

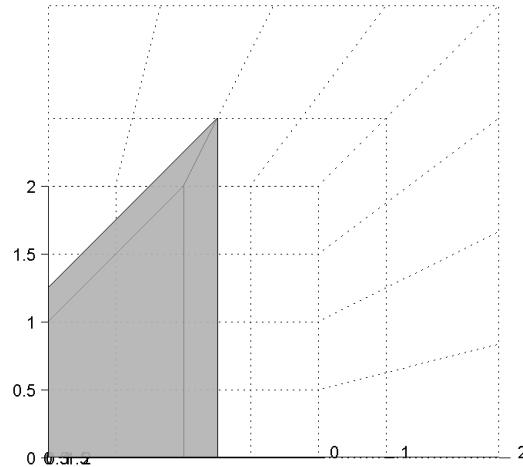
Όπως φαίνεται εδώ, οι δύο νέες συντεταγμένες είναι μικρότερες από τις αρχικές κατά το συντελεστή $1/(1-x/E)$, πράγμα που εξηγεί γιατί οι γραμμές που είναι πιο μακριά από το σημείο παρατήρησης φαίνονται μικρότερες από αυτές που βρίσκονται πιο κοντά. Όπως και πριν, ευθείες στο χώρο προβάλλονται σε ευθείες στο επίπεδο. Λόγω όμως του φαινομένου της σμίκρυνσης, ευθείες που είναι παράλληλες στο χώρο δεν έχουν πάντα παράλληλες προβολές – αυτό θα συμβεί μόνο στην περίπτωση που οι ευθείες είναι παράλληλες προς το επίπεδο παρατήρησης (αφού ο παράγοντας σμίκρυνσης θα είναι για αυτές ο ίδιος) .



Εικόνα 22: Ένα απλό τρισδιάστατο γεωμετρικό σχήμα



Εικόνα 23: Η ορθοκανονική προβολή του σχήματος



Εικόνα 24: Το ίδιο σχήμα σε προοπτική προβολή

Υλοποίηση με πίνακες

Αν θεωρήσουμε σαν επίπεδο παρατήρησης το επίπεδο $z=d$ (με $d \geq 0$) και τοποθετήσουμε το σημείο παρατήρησης στο $z=0$ μπορούμε να γράψουμε τα παραπάνω με τη μορφή πολλαπλασιασμού πινάκων, πράγμα που μας βολεύει αφού μπορούμε να υλοποιήσουμε όλους τους μετασχηματισμούς με ενιαίο τρόπο. Έτσι λοιπόν έχουμε τον εξής πίνακα για την προοπτική προβολή :

$$M_{\text{per}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix}$$

Αν τώρα θεωρήσουμε ότι το d είναι πολύ μεγάλο (θεωρητικά άπειρο) τότε πλησιάζουμε στην παράλληλη προβολή, δηλαδή στον πίνακα

$$M_{\text{ort}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

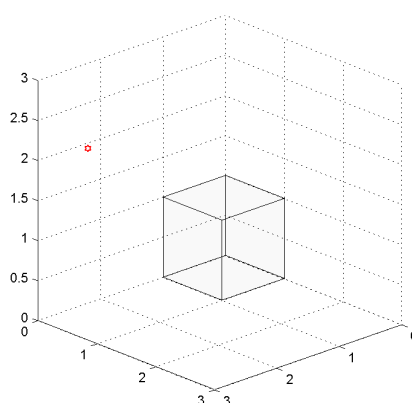
Μετασχηματισμοί προβολής και σκιές

Η πιο συνηθισμένη χρήση του μετασχηματισμού προβολής σε ένα τρισδιάστατο αντικείμενο αφορά στην κατάλληλη σχεδίασή του σε δύο διαστάσεις, έτσι ώστε να δημιουργηθεί η εντύπωση στο θεατή ότι «βλέπει» το αντικείμενο από κάποια συγκεκριμένη

θέση. Συνήθως αυτό το μοντέλο συνθετικής κάμερας προσεγγίζεται με ένα σημείο στο χώρο, από το οποίο γίνεται η προβολή (σημείο παρατήρησης) και το σχετικό επίπεδο προβολής, το οποίο είναι κάθετο στο διάνυσμα παρατήρησης.

Εκτός όμως από τη συνθετική κάμερα, μπορούμε να σκεφτούμε και ένα διαφορετικό είδος αντικειμένων μέσα σε μια συνθετική σκηνή, το οποίο να «παρατηρεί» τα τρισδιάστατα αντικείμενά μας. Ας σκεφτούμε για μια στιγμή πώς λειτουργούν οι φωτεινές πηγές στο περιβάλλον γύρω μας: το φως που εκπέμπεται από μια σημειακή φωτεινή πηγή, για παράδειγμα ένα κερί, είναι ελεύθερο να ταξιδέψει προς όλες τις κατευθύνσεις, εκτός αν σταματήσει πάνω σε ένα αδιαφανές αντικείμενο. Θεωρητικά, για να υπολογίσουμε τη σκιά που ρίχνει ένα αντικείμενο πάνω σε ένα άλλο ή πάνω στο δάπεδο στο οποίο βρίσκεται, θα έπρεπε να ελέγξουμε για τέτοιες διασταυρώσεις όλες τις ακτίνες που εκπέμπονται από μια φωτεινή πηγή – αυτό όμως δεν είναι καθόλου πρακτικό, ειδικά αν λάβουμε υπόψη μας ότι λίγες από αυτές τις ακτίνες συναντούν στην πράξη ένα αντικείμενο.

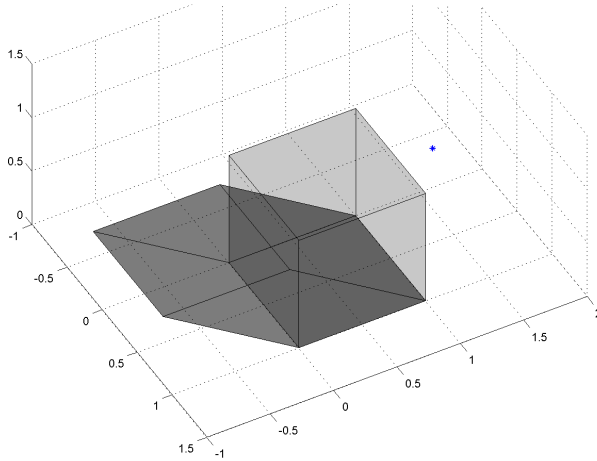
Αυτή η διαδικασία μπορεί να απλοποιηθεί αρκετά, αν τοποθετήσουμε το σημείο παρατήρησης ακριβώς στη θέση μιας φωτεινής πηγής ή, αν προτιμάτε, να δούμε πώς «βλέπει» η φωτεινή πηγή τα αντικείμενα της σκηνής μας, αντικαθιστώντας τις φωτεινές ακτίνες με ακτίνες «παρατήρησης». Για να γίνει πιο σαφές το παράδειγμα, ας θεωρήσουμε ένα μοναδιαίο κύβο και μια σημειακή φωτεινή πηγή στη θέση $L (1.45, -.8, 1.5)$.



Εικόνα 25: Ο μοναδιαίος κύβος και μια φωτεινή πηγή

Αν παρατηρήσουμε το αντικείμενο από τη θέση της πηγής, θα μπορούμε να δούμε την επιφάνεια στην οποία στηρίζεται ο κύβος ($z=0$), εκτός από τα σημεία τα οποία μας αποκρύπτει το αντικείμενο. Αν τώρα θυμηθούμε πως έχουμε αντικαταστήσει τις

φωτεινές ακτίνες με ακτίνες παρατήρησης, φτάνουμε εύκολα στο συμπέρασμα ότι τα σημεία που είναι ορατά θα φωτίζονται, ενώ τα υπόλοιπα θα βρίσκονται στη σιά του κύβου μας. Στην πραγματικότητα λοιπόν, μπορούμε να προβάλλουμε τον κύβο πάνω στο επίπεδο στο οποίο στηρίζεται για να υπολογίσουμε τη μορφή της σιάς που ρίχνει πάνω σε αυτό.



Εικόνα 26: Άποψη ενός κύβου από τη θέση της φωτεινής πηγής

Για λόγους απλότητας, μπορούμε να δεχτούμε ότι η φωτεινή πηγή είναι απείρως μακριά από το αντικείμενό μας, οπότε οι ακτίνες της είναι παράλληλες όταν φτάνουν σε αυτό και η προβολή μας εκφυλίζεται σε παράλληλη. Στην πράξη, αυτή η παραδοχή μπορεί να ισχύει ρεαλιστικά όταν θέλουμε να μοντελοποιήσουμε μια σκηνή σε εξωτερικό χώρο, οπότε η κύρια φωτεινή πηγή είναι ο ήλιος. Διατηρώντας την αναλογία φωτεινών ακτίνων και ακτίνων παρατήρησης, μπορούμε να σκεφτούμε ότι κάθε σημείο $P(x_P, y_P, z_P)$ στην επιφάνεια του αντικειμένου θα δημιουργεί σιά η οποία ξεκινά από το P και κατευθύνεται μακρύτερα από τη φωτεινή πηγή $L(x_L, y_L, z_L)$, μέχρι να συναντήσει το επίπεδο $z=0$ στο σημείο $S(x_S, y_S, 0)$. Συνοπτικά αυτό συμβολίζεται:

$$\mathbf{S} = \mathbf{P} - \alpha \mathbf{L}$$

στην οποία αν θέσουμε $0 = z_P - \alpha z_L$, βλέπουμε ότι για τον παράγοντα α ισχύει $\alpha = z_P/z_L$.

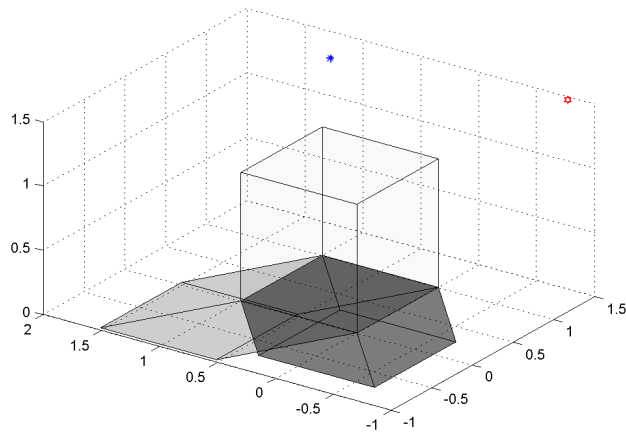
Λύνοντας για τις άλλες δύο συντεταγμένες, βρίσκουμε ότι:

$$x_S = x_P - z_P/z_L \cdot x_L \text{ και } y_S = y_P - z_P/z_L \cdot y_L$$

Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να γραφούν συμπυκνωμένα με μορφή πινάκων:

$$[x_s \ y_s \ 0 \ 1] = [x_p \ y_p \ z_p \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -x_L/z_L & -y_L/z_L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Η παρακάτω εικόνα εμφανίζεται το αντικείμενό μας να φωτίζεται από δύο φωτεινές πηγές κι έτσι να ρίχνει τη σιά του σε δύο περιοχές πάνω στο επίπεδο.



Εικόνα 27: Ο κύβος όπως φωτίζεται από δύο φωτεινές πηγές και η σιά που σχηματίζεται

Μαθηματικό συμπλήρωμα

Ας θυμηθούμε κάποιες βασικές έννοιες των διανυσματικών γραφικών που είναι χρήσιμες στα πρακτικά προβλήματα.

Μήκος Διανύσματος

Το μέγεθος ενός διανύσματος \mathbf{w} συμβολίζεται ως $|\mathbf{w}|$ και δίνεται από τη σχέση:

$$|\mathbf{w}| = \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + \dots + w_n^2}$$

Για παράδειγμα, το μήκος του διανύσματος $\mathbf{w}_1 = (4, -2)$ είναι $\sqrt{20}$ και το μήκος του $\mathbf{w}_2 = (1, -3)$ είναι $\sqrt{10}$. Ένα διάνυσμα με μηδενικό μήκος συχνά αναπαριστάται με $\mathbf{0}$. Προσέξτε ότι αν \mathbf{w} είναι το διάνυσμα από το σημείο A στο σημείο B, τότε $|\mathbf{w}|$ είναι η απόσταση μεταξύ των σημείων αυτών.

Τώρα που ορίσαμε το μήκος διανύσματος, μπορούμε να αναφέρουμε και ένα διαφορετικό τρόπο αναπαράστασης ενός δισδιάστατου διανύσματος με την πολική μορφή του (μήκος, γωνία). Έτσι, αν υπάρχει διάνυσμα $\mathbf{w} = (x, y) = (3, 4)$, τότε σύμφωνα με τα παραπάνω το μήκος του είναι 5 και η διεύθυνση του

36,8699ο από τον οριζόντιο άξονα (πολικές συντεταγμένες : (5, 36,8699ο)). Επειδή συχνά τα διανύσματα παρουσιάζονται ως οντότητες με μήκος και διεύθυνση και όχι συγκεκριμένη θέση, η πολική αναπαράσταση φαντάζει πολύ λογική.

Κανονικοποίηση Διανυσμάτων – Μοναδιαία Διανύσματα

Συχνά είναι βολικό να πολλαπλασιάζουμε ένα διάνυσμα με μία σταθερά έτσι ώστε το αποτέλεσμα να έχει μήκος ίσο με τη μονάδα. Η πράξη αυτή λέγεται **κανονικοποίηση διανύσματος**, και το αποτέλεσμα **μοναδιαίο διάνυσμα (normal)** (δηλαδή διάνυσμα με μοναδιαίο μήκος). Έτσι αν το διάνυσμα **a** πολλαπλασιαστεί με τη σταθερά $1/|a|$ προκύπτει το μοναδιαίο διάνυσμα

$$\mathbf{u}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$$

Προφανώς το διάνυσμα αυτό έχει μήκος $|\mathbf{u}_a|=1$ και έχει την ίδια διεύθυνση με το **a**. Κάποιες φορές θα αναφερόμαστε στο μοναδιαίο διάνυσμα ως διεύθυνση. Προσέξτε ότι οποιοδήποτε διάνυσμα μπορεί να γραφτεί ως το μήκος του πολλαπλασιασμένο με το μοναδιαίο διάνυσμα. Αν η κανονική μορφή του **a** είναι **u_a**, τότε το **a** μπορεί να γραφτεί ως :

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \mathbf{u}_a$$

Γραμμικός Συνδυασμός Διανυσμάτων

Γραμμικός Συνδυασμός m διανυσμάτων είναι ένα νέο διάνυσμα της μορφής :

$$\mathbf{w} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_m\mathbf{v}_m$$

όπου a_1, a_2, \dots, a_m σταθερές. Για παράδειγμα, από το γραμμικό συνδυασμό $2(3,4) + 3(2,4)$ προκύπτει το διάνυσμα (12,20).

Μία ειδική μορφή γραμμικών συνδυασμών παίζει ιδιαίζοντα ρόλο στα μαθηματικά και έχει πολλές εφαρμογές στα γραφικά είναι ο κυρτός (convex) γραμμικός συνδυασμός, στην έκφραση του οποίου οι συντελεστές είναι μη μηδενικοί και έχουν άθροισμα ίσο με τη μονάδα. Το σύνολο των συντελεστών λέγεται συχνά ότι αποτελεί μια διαμέριση της μονάδας. Τέτοιοι συνδυασμοί προκύπτουν συχνά σε εφαρμογές όπου πρέπει να επιτύχουμε μοναδιαία ποσότητα ενός μεγέθους, προσθέτοντας θετικές ποσότητες κάθε συνιστώσας. Για παράδειγμα, ένας πολύ σημαντικός κυρτός γραμμικός συνδυασμός είναι ο

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{a}(1-t) + \mathbf{b}t$$

όπου \mathbf{a} , \mathbf{b} τυχαία διανύσματα και $0 \leq t \leq 1$. Οι συντελεστές t και $(1-t)$ είναι προφανώς μη αρνητικοί και έχουν άθροισμα ίσο με 1. Επί προσθέτως η συνάρτηση $\mathbf{p}(t)$ μάς δίνει ένα διάνυσμα του οποίου το μήκος και η διεύθυνση μεταβάλλονται για διαφορετικές τιμές του t . Για $t=0$, $\mathbf{p}(t)=\mathbf{a}$ και για $t=1$, $\mathbf{p}(t)=\mathbf{b}$. Προσέξτε πως με κατάλληλη επιλογή του t , κάθε διάνυσμα το οποίο ακουμπά την ευθεία που περνά από τα \mathbf{a} και \mathbf{b} μπορεί να αναπαρασταθεί από τον κυρτό γραμμικό συνδυασμό. Αν θεωρήσουμε ότι η $\mathbf{p}(t)$ έχει το ένα άκρο σταθερό, τότε καθώς το t αυξάνει από 0 σε 1 η $\mathbf{p}(t)$ απομακρύνεται από το \mathbf{a} προς το \mathbf{b} , πάντα όμως με το άλλο άκρο πάνω στην ευθεία μεταξύ των διανυσμάτων αυτών. Αν το t αυξηθεί πέρα του 1, τότε το $\mathbf{p}(t)$ θα προχωρήσει πέρα του \mathbf{b} αλλά δεν θα μιλάμε πλέον για κυρτό γραμμικό συνδυασμό. Ομοίως το $\mathbf{p}(t)$ ορίζεται για $t < 0$ αλλά και πάλι δεν είναι κυρτός γραμμικός συνδυασμός.

Αλλάζοντας λίγο τους όρους στην έκφραση του κυρτού γραμμικού συνδυασμού, καταλήγουμε σε μία άλλη ενδιαφέρουσα μορφή για τη συνάρτηση των διανυσμάτων:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= \mathbf{a} + (\mathbf{b}-\mathbf{a})t \\ &= \mathbf{a} + \mathbf{c}t \end{aligned}$$

όπου ορίζουμε $\mathbf{c} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$. Για t μεταξύ 0 και 1, αυτή η μορφή είναι επίσης ένας κυρτός γραμμικός συνδυασμός των \mathbf{a} και \mathbf{b} , αλλά δεν είναι εμφανές, λόγω της αλλαγής των όρων. Τώρα το t εμφανίζεται σαν συντελεστής μόνο σε ένα από τα διανύσματα, και ο όρος $\mathbf{c}t$ λειτουργεί σαν μετατόπιση του \mathbf{a} . Καθώς το t αυξάνει, ένα αυξανόμενο ποσοστό της μετατόπισης \mathbf{c} προστίθεται στο \mathbf{a} .

Γινόμενα διανυσμάτων

Τώρα θα εισάγουμε ένα απλό αλλά πολύ ισχυρό εργαλείο που χρησιμοποιείται συχνά στις εφαρμογές, καθώς προσφέρει πολύτιμες πληροφορίες για ένα ζεύγος διανυσμάτων, όπως η μεταξύ τους γωνία και η προβολή του ενός διανύσματος πάνω στο άλλο. Παράλληλα δίνει την εξίσωση επιπέδου που περιγράφεται στα πλαίσια ενός σημείου και δύο διανυσμάτων.

Το **εσωτερικό γινόμενο** (γνωστό επίσης και ως **βαθμωτό γινόμενο**) δύο διανυσμάτων είναι απλό να οριστεί και να υπολογιστεί. Για τα δισδιάστατα διανύσματα (α_1, α_2) και (β_1, β_2) , είναι

απλά ίσο με την τιμή $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$. Πολλαπλασιάζουμε απλά τις αντίστοιχες συνιστώσες των δύο διανυσμάτων και προσθέτουμε τα αποτελέσματα. Για παράδειγμα το εσωτερικό γινόμενο των (3,4) και (1,6) είναι 27, και των (2,3) και (9, -6) είναι 0. Πιο αυστηρά, Το εσωτερικό γινόμενο d δύο n -διάστατων διανυσμάτων $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ και $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ σημειώνεται ως $d = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ και έχει τιμή

$$d = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \sum_{i=1}^n v_i * w_i$$

Το εσωτερικό γινόμενο έχει τέσσερις σημαντικές ιδιότητες που χρησιμοποιούμε συχνά και προκύπτουν εύκολα από τον ορισμό.

- ο Αντιμεταθετική : $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
- ο Επιμεριστική : $(\mathbf{a} + \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{b}$
- ο Προσεταιριστική : $(s \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = s (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
- ο $|\mathbf{b}|^2 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$

Η πρώτη δηλώνει ότι η σειρά με την οποία τα διανύσματα πολλαπλασιάζονται δεν έχει σημασία. Οι επόμενες δύο αποδεικνύουν ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι γραμμικό. Δηλαδή το εσωτερικό γινόμενο του αθροίσματος διανυσμάτων μπορεί να εκφραστεί ως το άθροισμα των επιμέρους εσωτερικών γινομένων, και ο πολλαπλασιασμός ενός διανύσματος με έναν αριθμό ισούται με τον πολλαπλασιασμό του εσωτερικού γινομένου με τον αριθμό αυτό. Η τελευταία ιδιότητα είναι επίσης χρήσιμη, καθώς υποδηλώνει ότι το εσωτερικό γινόμενο ενός διανύσματος με τον εαυτό του έχει ως αποτέλεσμα το τετράγωνο του μήκους του διανύσματος.

Εφαρμογές του εσωτερικού γινομένου

- ο Η γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων

Η πιο σημαντική εφαρμογή του εσωτερικού γινομένου είναι η εύρεση της γωνίας μεταξύ δύο διανυσμάτων ή μεταξύ δύο τεμνόμενων ευθειών. Έστω δύο διανύσματα, \mathbf{a} και \mathbf{b} , που σχηματίζουν γωνία θ . Τα διανύσματα αυτά μπορούν να έχουν δύο, τρεις ή οποιοδήποτε αριθμό διαστάσεων. Σχηματίζουν τις δύο πλευρές ενός τριγώνου, με τρίτη πλευρά την $\mathbf{a-b}$. Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων, το τετράγωνο του μήκους του $\mathbf{a-b}$

μπορεί να εκφραστεί με τους όρους των μηκών των \mathbf{a} και \mathbf{b} και το συνημίτονο της γωνίας θ .

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2 |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta)$$

Από την παραπάνω σχέση, με τη βοήθεια των ιδιοτήτων του εσωτερικού γινομένου, προκύπτει ότι:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη με $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$ και χρησιμοποιώντας το συμβολισμό του μοναδιαίου διανύσματος $\mathbf{u}_a = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ έχουμε

$$\cos(\theta) = \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{u}_b$$

Αυτό σημαίνει ότι το συνημίτονο της γωνίας δύο διανυσμάτων \mathbf{a} και \mathbf{b} είναι ίσο το εσωτερικό γινόμενο των αντίστοιχων κανονικοποιημένων διανυσμάτων.

ο Το πρόσημο του $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ και η καθετότητα

Θυμηθείτε ότι το $\cos(\theta)$ είναι **θετικό** εάν το $|\theta| < 90^\circ$, ίσο με το **μηδέν** εάν $|\theta| = 90^\circ$ και **αρνητικό** εάν $|\theta| > 90^\circ$. Επειδή το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ανάλογο του συνημιτόνου της γωνίας μεταξύ τους, μπορούμε απ' ευθείας να παρατηρήσουμε ότι η γωνία δύο διανυσμάτων (με μη μηδενικά μήκη) είναι μικρότερη από 90° εάν $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} > 0$, ακριβώς 90° εάν $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ και μεγαλύτερη από 90° εάν $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$.

ο Έλεγχος του Εσωτερικού – Εξωτερικού Ημιεπιπέδου για ένα Σημείο

Σε πολλές εφαρμογές έχει φυσική σημασία να εισάγουμε τον όρο «μέσα» και «έξω» στα ημιεπίπεδα που ορίζονται από μία γραμμή. Όταν η μία πλευρά της ευθείας είναι γνωστό ότι είναι στο εσωτερικό, μπορούμε να ορίσουμε το **εσωτερικό μοναδιαίο** της γραμμής. Το **εξωτερικό μοναδιαίο** δείχνει τότε προς την αντίθετη κατεύθυνση.

Συχνά χρειάζεται να ελέγξουμε αν ένα σημείο Q βρίσκεται μέσα ή έξω από το ημιεπίπεδο μίας γραμμής. Υποθέτουμε ότι η γραμμή E περνά από το σημείο A και έχει εξωτερικό μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{n} . Η γωνία θ μεταξύ του \mathbf{n} και του διανύσματος $Q - A$ πρέπει να είναι μικρότερη από 90° εάν το Q βρίσκεται στο εξωτερικό, κι έτσι το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{n} \cdot (Q - A) > 0$. Ομοίως, η γωνία θ θα είναι μεγαλύτερη από 90° αν το Q βρίσκεται στο εσωτερικό κι έτσι $\mathbf{n} \cdot (Q - A) < 0$. Τέλος, η γωνία θα είναι

ακριβώς 90° αν το Q βρίσκεται πάνω στην E , στην οποία περίπτωση $\mathbf{n} \cdot (Q - A) = 0$. Αυτό μας παρέχει έναν απλό έλεγχο :

- ο το Q βρίσκεται στο εξωτερικό ημιεπίπεδο του E αν $\mathbf{n} \cdot (Q - A) > 0$.
- ο το Q βρίσκεται πάνω στην E αν $\mathbf{n} \cdot (Q - A) = 0$
- ο το Q βρίσκεται στο εσωτερικό ημιεπίπεδο του E αν $\mathbf{n} \cdot (Q - A) < 0$

Η παραπάνω ιδέα γενικεύεται εύκολα για να δώσει τον έλεγχο της θέσης ενός σημείου Q σε σχέση με ένα επίπεδο. Υποθέστε ότι σε μια εφαρμογή, η έννοια του εσωτερικού και εξωτερικού είναι διαθέσιμη, για παράδειγμα σαν το εσωτερικό ενός πολυγωνικού μοντέλου, και το επίπεδο P είναι γνωστό ότι περνά από το σημείο A και έχει το εξωτερικό μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{n} . Τότε το σημείο Q θα είναι στο εξωτερικό ημιεπίπεδο του P αν το διάνυσμα $Q - A$ σχηματίζει γωνία μικρότερη των 90° με το \mathbf{n} ή αν η ποσότητα $T = (\mathbf{q} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n}$ είναι θετική. Αν και όλα τα σημεία και διανύσματα είναι εδώ τριών διαστάσεων αντί για δύο, ο έλεγχος είναι ο ίδιος όπως και με τη δισδιάστατη περίπτωση, κι έτσι μπορούμε απευθείας να πούμε ότι το Q βρίσκεται

- ο στο εξωτερικό ημιεπίπεδο του P , αν $T > 0$.
- ο πάνω στο P , αν $T = 0$.
- ο στο εσωτερικό ημιεπίπεδο του P αν $T < 0$.