

# ΓΡΑΦΙΚΗ ΜΕ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕΣ

## ΜΑΘΗΜΑ 6<sup>ΟΥ</sup> ΕΞΑΜΗΝΟΥ Η/Υ & ΜΗΧ Η/Υ

1. Εισαγωγή στη Γραφική με Η/Υ
2. Συσκευές Γραφικών και ο Έλεγχος τους
3. Αρχικές Έννοιες Σχεδίασης Εικόνων
4. Σχεδίαση γραμμών - Κύκλων
5. Μετασχηματισμοί

Υπεύθυνοι  
Στέφανος Κόλλιας  
Βασίλης Λούμος

Μάρτιος 2004

## Συσκευές Επίδειξης Γραφικών

- Εκτυπωτές
- Σχεδιαστές Πενών (Pen/ Drum Plotters)
- Οθόνες (Video Monitors).

Η απεικόνιση γίνεται στους Σωλήνες Καθοδικών Ακτινών (CRTs) με

- Δέσμες Ηλεκτρονίων
- Επικάλυψη φωσφόρου

Φωτεινότητα  $\leftrightarrow$  Αριθμός Ηλεκτρονίων  
Θέση στην Οθόνη  $\leftrightarrow$  Απόκλιση Δέσμης



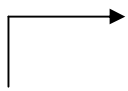
### **Μονόχρωμη Οθόνη**

Συνδυασμός 3 δεσμών – Μάσκα –  
Τριάδες Σημείων / Θέση

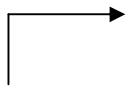


### **Έγχρωμη Οθόνη**

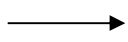
Οθόνες



Χαρακτήρων

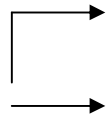


Σχεδίασης Γραμμών



Raster (Pixels)

Υπολογιστικοί Σταθμοί



Standalone

Δικτυωμένοι

## Εφαρμογές

- 1) Δημιουργία Παρουσιάσεων – Slides
- 2) Ζωγραφική – αποτυπώσεις σε Εικόνες
- 3) Παρουσίαση Μαθηματικών Σχέσεων
- 4) Σχεδίαση Λογικών Κυκλωμάτων
- 5) Αρχιτεκτονικά – Μηχανολογικά Σχέδια
- 6) Χαρτογραφία
- 7) Προσομειωτές Πτήσεων
- 8) Επικοινωνία Ανθρώπου – Μηχανής (Synthetic Avatars, Agents)
- 9) Εικονική/Επαυξημένη Πραγματικότητα

## **Πρότυπα Συστήματα Γραφικών**

- GKS: Graphical Kernel Systems 2/3-D
- PHIGS: Programmer's Hierarchical International Graphics System
- Γλώσσα Postscript

## **Περιοδικά**

- 1) ACM Siggraph - Computer Graphics
- 2) ACM Transactions on Graphics
- 3) IEEE Computer Graphics&Applications
- 4) Computer Graphics&Image Processing
- 5) Eurographics
- 6) Computer Graphics World
- 7) The Visual Computer
- 8) The Computer Graphics Forum

## Οθόνες Σχεδίασης Γραμμών

– Σχεδίαση σημείων στην οθόνη

→ Pen\_Up

→ Pen\_down

→ Go\_To (x,y)

→ Get\_Pen (i)

## Οθόνες Ανανέωσης Διανυσμάτων

- Σχεδίαση Γραμμών και Διανυσμάτων
- Δέσμη ηλεκτρονίων κινείται σε ευθεία γραμμή
- Λόγω κίνησης ο φωτισμός (μέσω του φωσφόρου) σβήνει σιγά - σιγά

⇒ Επανασχεδίαση 50/60 φορές/sec

## Οθόνες RASTER SCAN

- Σημεία (Pixels)
- TV-line Scanning
- Frame Buffer (Αποθήκευση Μνήμης)
- Interlacing (Επίδειξη 25/30 frames/sec)

Μονόχρωμες - Έγχρωμες Εικόνες

Μήκος Λέξης Αναπαράστασης Pixels (π.χ. 6 bit/pixel, 2 ανά Χρώμα)

Bits Σχετική Ένταση/Χρώμα

00 Πολύ Σκούρο (0)

01 Ελαφρά Σκούρο (1/3)

10 Ελαφρά Ανοικτό (2/3)

11 Ανοικτό (1)



D/A μετατροπή

Συνολικά  $4^3 = 64$  χρώματα επίδειξης

**Look Up Table** → Ορίζει το σετ των χρωμάτων (π.χ. 256) που χρησιμοποιούνται ταυτόχρονα.

**Παλέτα Χρωμάτων** → Ορίζει το σύνολο των χρωμάτων που μπορούν να επιδειχτούν.

## **Συστήματα Εκτύπωσης (Raster)**

– Laser Printers (Ανάλυση - resolution)

- Κίνηση Δέσμης Ηλεκτρονίων πάνω σε Εσωτερική Επιφάνεια Σχεδίασης
- Ηλεκτρική φόρτιση της επιφάνειας/ toner  
- σκόνη επικολλάται σε σημεία
- Toner μεταφέρεται στο χαρτί

– Ink-Jet plotters (έκχυση μελάνης)

## **Bit-mapped Συστήματα Επίδειξης**

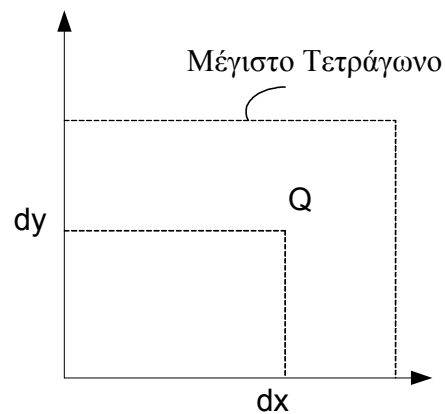
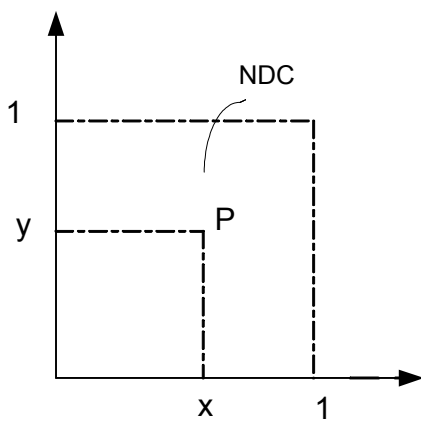
–Frame Buffer ανήκει στην μνήμη του Η/Υ. Λογικό Κύκλωμα επικοινωνεί με αυτόν και Refreshes

–Σχεδίαση Γραμμής σε Raster Συστήματα.

Δεν είναι συνεχής.

## ΟΔΗΓΟΙ ΣΥΣΚΕΥΩΝ

- Πρόγραμμα Εφαρμογής Ανεξάρτητης Συσκευής
- Εισαγωγή εντολών (π.χ. draw, line) για συγκεκριμένες συσκευές
- Κανονικοποιημένες Συντεταγμένες Συσκευής (NDC)



$$dx = ax + b$$
$$dy = cy + d$$

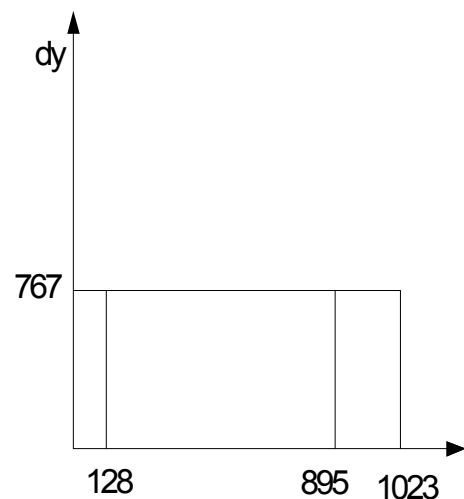
έστω  $x_{\max} = 1023$   
 $y_{\max} = 767$

$$x = 0 \rightarrow dx = 128 \rightarrow b = 128$$

$$x = 1 \rightarrow dx = 895 \rightarrow a = 767$$

$$y = 0 \rightarrow dy = 0 \rightarrow d = 0$$

$$y = 1 \rightarrow dy = 767 \rightarrow c = 767$$

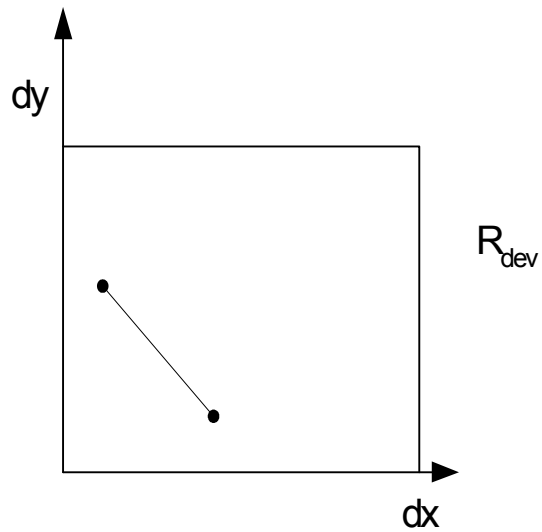
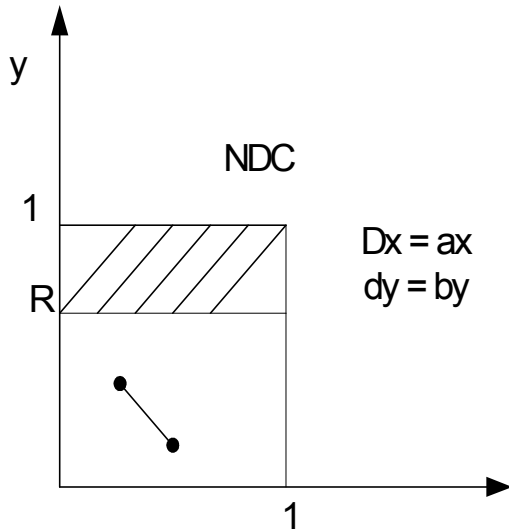




Aspect Ratio  $R = \frac{\text{Υψος}}{\text{Πλάτος}}$

$$TV : \frac{1}{R} = \frac{4}{3}$$

$$HDTV : \frac{1}{R} = \frac{16}{9}$$



$$dx = x_{\max} X$$

$$R = y_{\max} / X_{\max}$$

$$dy = x_{\max} Y$$

### Πρωτογενείς Συνιστώσες του GSK (Εξόδου)

- Polylines Ακολουθίες Ευθυγράμμων Τμημάτων  
(Λίστα από Κορυφές)
- Polymarkers ⇓
- Text ⇓
- ⇓ Μέγεθος (Πάχος) ⇓ Χρώμα ⇓ Είδος Γραμμής
- ⇓ Γραμμής
- ⇓
- ⇓ Μέγεθος
- ⇓ Font
- ⇓ Χρώμα
- ⇓ Απόσταση
- ⇓ justify

## Λογικές Συναρτήσεις Εισόδου

- *Διάβασμα Ακολουθιών Χαρακτήρων*
- *Επιλογή (Από ένα Set of Buttons )*
- *Valuator (Διάβασμα Τιμή π.χ. Μεγέθους Γραμμής)*
- *Locator (Θέσης Ορισμός)*

*Με ποντίκι*

*Graphics Cursor*

## Φυσικές Συσκευές Εισόδου

- *Πληκτρολόγιο*
- *Ποντίκι*
- *Κουμπιά*
- *Ταμπλέτα + Στυλό*
- *Joystick- Trackball*
- *Knobs*
- *Thumbwheels*

## Σχεδίαση Απλών Γραμμών→ Σχημάτων

### 4. Το παγκόσμιο σύστημα συντεταγμένων (*World Coordinate System*)

*Αναγκαίες Διαδικασίες*

- *Κλιμάκωση διαστάσεων (Scaling)*
- *Μοντελοποίηση (Modeling) → Γεωμετρικά Μοντέλα Αντικειμένων*
- *Παρατήρηση (Viewing) → Παρατηρούμενη όψη του αντικειμένου στην οθόνη*

*Μοντελοποίηση σε Παγκόσμιο Σύστημα Συντεταγμένων*

*2-D επίπεδο*



Παράθυρα

Επιδεικνυόμενες Όψεις



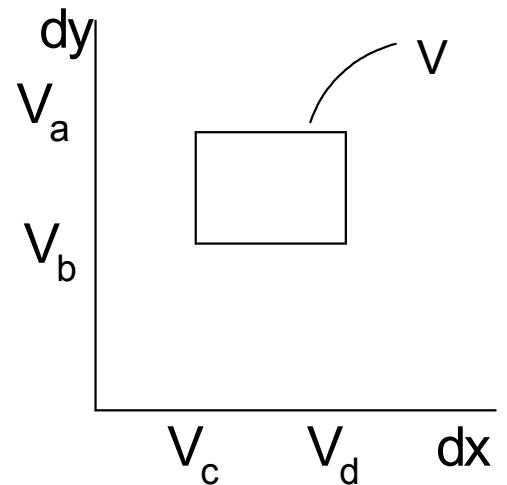
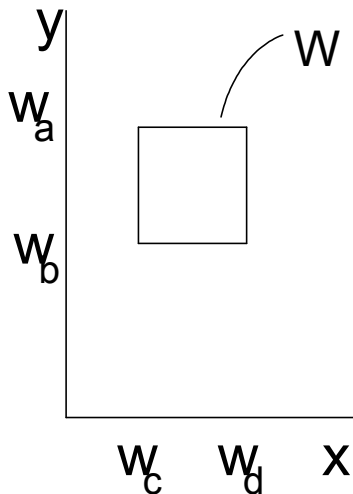
Windows



View ports

## Διαδικασία σχεδίασης γραμμών

- Αποκοπή (clipping) γραμμών έξω από τα όρια των παραθύρων
- Αντιστοίχιση περιεχομένων του παραθύρου με το view port
- Σχεδίαση του αντικειμένου σε κανονικές Συντεταγμένες-



-

$$dx = ax + b$$

$$X = w_c \rightarrow dx = v_c \quad \left. \vphantom{X = w_c} \right\} v_c = a w_c + b$$

$$X = w_d \rightarrow dx = v_d \quad \left. \vphantom{X = w_d} \right\} v_d = a w_d + b$$

$$dy = cy + d$$

όμοια

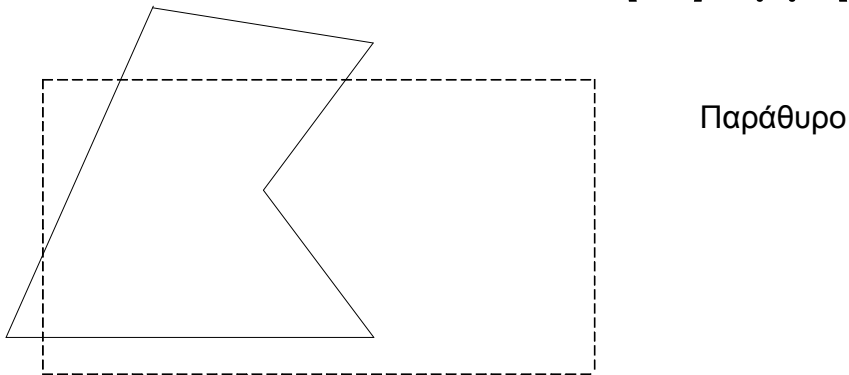
$$a = \frac{v_d - v_c}{w_d - w_c}$$

$$c = \frac{v_a - v_b}{w_a - w_b}$$

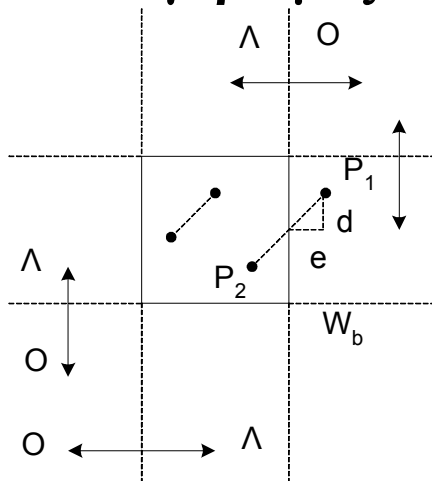
$$b = \frac{v_c w_d - w_c v_d}{w_d - w_c}$$

$$d = \frac{v_b w_a - v_a w_b}{w_a - w_b}$$

## Αποκοπή Γραμμής



## Αλγόριθμος Cohen- Sutherland



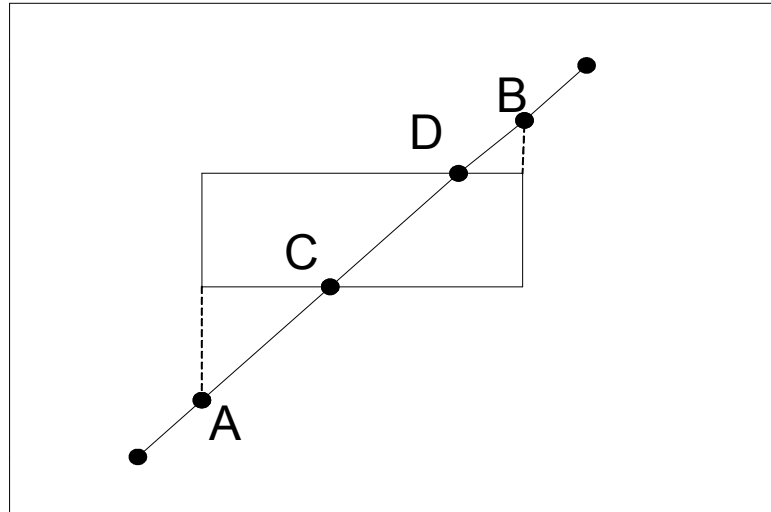
## Διατήρηση Γραμμής

Αν 4 συγκρίσεις των ακραίων σημείων (AND)  $\Rightarrow$  ΛΑΘΟΣ

πχ.  $P_{1.y} = P_{1.y} + (W_b - P_{1.x}) * m$

$$m = \frac{P_{2.y} - P_{1.y}}{P_{2.x} - P_{1.x}}$$

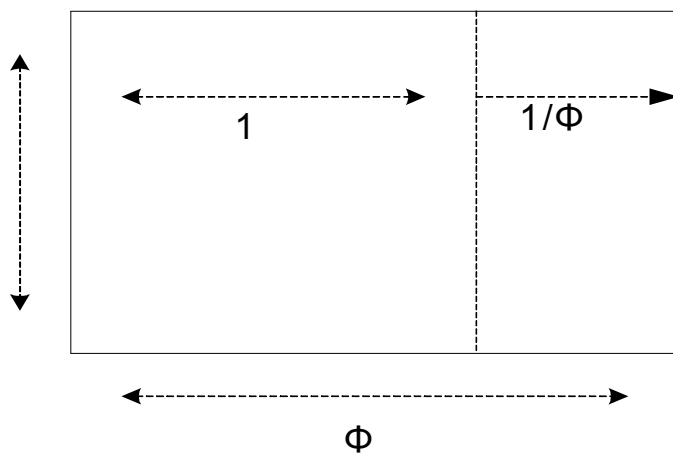
-15<sup>α</sup>-



4 συγκρίσεις για αποκοπή της γραμμής

-15<sup>β</sup>-

Λόγος Παρατήρησης (Χρυσό Ορθογώνιο)

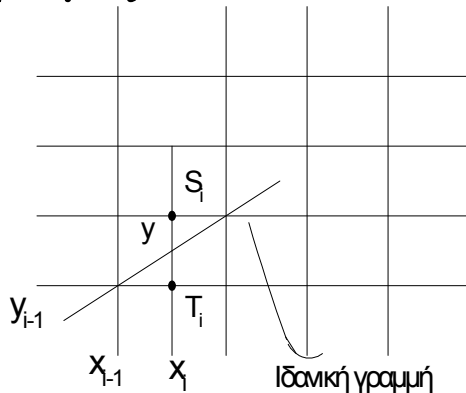


$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi} \rightarrow \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618033989\dots$$

- Γραμμές να φαίνονται ίσιες
- Γραμμές να τερματίζουν ακριβώς
- Σταθερή Πυκνότητα
- Πυκνότητα Γραμμής να είναι ανεξάρτητη μήκους και γωνίας
- Γρήγορη Σχεδίαση
- Απλός γραμμικός → μεταβολή κάθε συντεταγμένης κατά (μίας την φορά)  $\pm 1$  pixel.
- Αλγόριθμος Bresenham
  - υπολογίζει το σφάλμα (απόσταση κάθετα στον άξονα μεγαλύτερης μετακίνησης) ανάμεσα στην ακριβή διαδρομή και τα σημεία πραγματικά σημεία

## Σχεδίαση Γραμμών

### Αλγόριθμος Bresenham



$$(x_a, y_a) \rightarrow (x_b, y_b)$$

$$y = m(x - x_a) + y_a$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$$

Παραδοχές

$$x_a < x_b$$

$$0 < m < 1$$

$$y^* = m(x_i - x_a) + y_a$$

$$e(T_i) = y^* - y_{i-1}$$

$$e(S_i) = (y_{i-1} + 1) - y^*$$

(1) Μεταβολή

$$x_i = x_{i-1} + 1$$

(2) Υπολογισμός

$$y_i = y_{i-1}$$

ή

$$(3) y_i = y_{i-1} + 1$$

Επιλογή  $T_i$  αν και μόνο αν,

$$e(T_i) - e(S_i) < 0 \quad (4)$$

$$e_i = \Delta_x \cdot \{e(T_i) - e(S_i)\} = 2(\Delta y)(x_i - x_a) + 2(\Delta x)(y_a - y_i) - \Delta_x \quad (5)$$

(1,2,3,4)

$$y_i = y_{i-1} \quad \text{αν} \quad e_i < 0$$

$$y_i = y_{i-1} + 1 \quad \text{αλλιώς}$$

Αναδρομικός Υπολογισμός  $e_{i+1} = e_i + 2(\Delta y) - 2(\Delta x)\{y_i - y_{i-1}\}$



## Υλοποίηση

- Έλεγχος πρόσημου  $e_i$

- Απόφαση για  $y_i$

$$\begin{array}{l} \nearrow = y_{i-1} \\ \searrow = y_{i-1} + 1 \end{array}$$

- Υπολογισμός	$e_{i+1}$	$\begin{array}{l} \nearrow = e_i + 2(\Delta y) \\ \searrow = e_i + 2(\Delta y - \Delta x) \end{array}$
---------------	-----------	--

αρχικοποίηση  $e_i = 2(\Delta y) - (\Delta x)$

## Επεκτάσεις

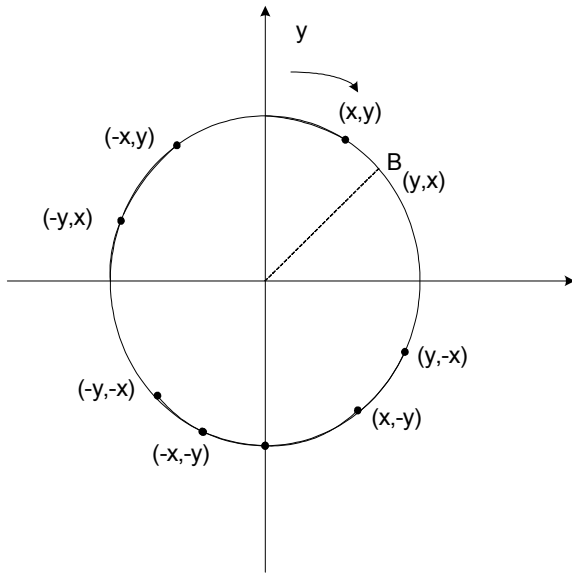
-  $x_a > x_b$   $x_a \leftrightarrow x_b$

-  $m > 1$   $x \leftrightarrow y$

-  $-1 < m < 0$   $\Delta y \leftrightarrow -\Delta y$

-  $m < -1$   $\Delta x \leftrightarrow -\Delta x$

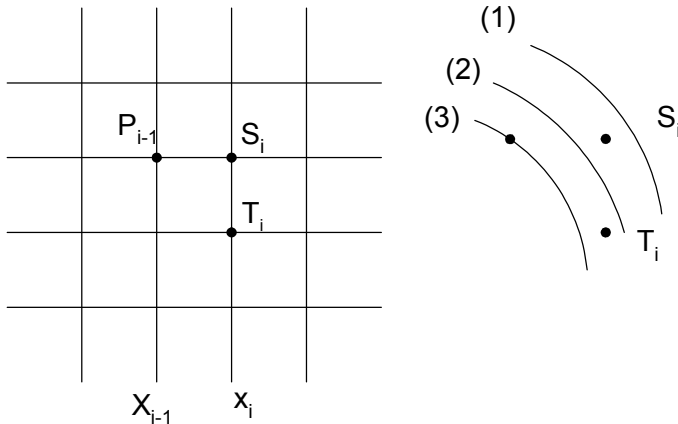
# ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΚΥΚΛΩΝ



$$Y^2 = R^2 - x^2$$

Χρήση Συμμετριών σε 1/8  
Κύκλου

## Αλγόριθμος Bresenham



Υπόθεση

Έστω  $P_{i-1} = (x_{i-1}, y_{i-1})$



$$S_i = (x_{i-1} + 1, y_{i-1})$$

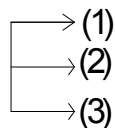
$$T_i = (x_{i-1} + 1, y_{i-1} - 1)$$

Ορισμός  $e(p) = x^2 + y^2 - R^2$

Κριτήριο  $e_i = e(S_i) + e(T_i)$

$e_i < 0$  επιλογή  $S_i$

αλλιώς επιλογή  $T_i$



Επαλήθευση

## Αναδρομικός Υπολογισμός (Αλγόριθμοι Michenen)

$$e_{i+1} = e_i + 4x_{i-1} + 6 + 2(y_i^2 - y_{i-1}^2) - 2(y_i - y_{i-1})$$

Έλεγχος

$e_i$

Υπολογισμός

$y_i$

(? =  $y_{i-1}$ )  $e_{i+1} = e_i + 4x_{i-1} + 6$

(? =  $y_{i-1} - 1$ )  $e_{i+1} = e_i + 4(x_{i-1} - y_{i-1}) + 1$

## Αρχικοποίηση

$$\left. \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ y_0 = R \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} S_1 = (1, R) \\ T_1 = (1, R - 1) \end{array} \right\} \rightarrow \{e_1 = 3 - 2R\}$$

## ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Περιστροφή- Μεταφορά Κλιμάκωση Στρέβλωση

Rotation Translation Scale Shear

2-Δ Μετασχηματισμοί AFFINE (Γραμμικό + Μετατοπίσεις)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P + \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

Μετατόπιση

$$P' = \begin{pmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{pmatrix} P$$

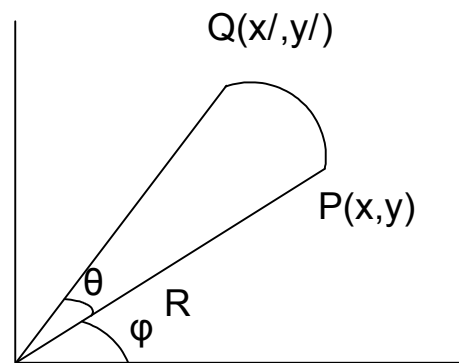
Κλιμάκωση

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$y' = x \sin \theta + y \cos \theta$$

$$P' = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} P$$

Περιστροφή



$$x' = R \cos(\theta + \varphi)$$

$$y' = R \sin(\theta + \varphi)$$

Shearing

(Italics  $\Leftarrow$  Regular γράμματα)

πχ.  $x' = x + hy$

$y' = y$

γενικότερα  $\begin{cases} x' = x + hy \\ y' = gx + y \end{cases}$

$$P' = \begin{pmatrix} 1 & h \\ g & 1 \end{pmatrix} P$$

### Ιδιότητες AFFINE Μετασχηματισμών

1. Διατήρηση Γραμμών (Τριγώνου, Πολυγώνου κ.λ.π.)
2. Διατήρηση Παραλληλίας Γραμμών  
(Παραλληλόγραμμα)
3. Αντιστοίχιση – Μετατροπή Συστημάτων  
Συντεταγμένων
4. Αναλογίες Αποστάσεων Διατηρούνται (Μέσα Γραμμών  
/ Τμημάτων )

$$5. \frac{\text{Εμβαδό // πολυγώνου}}{\text{Εμβαδό // πολυγώνου}} = |\det M|$$

$$\det M = ad - bc$$

### Συνδυασμός Μετασχηματισμών AFFINE

Μετασχηματισμός Windows  $\rightarrow$  View port

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

SCALE      TRANSLATION

- i. Μεταφορά κέντρου παραθύρου  $\implies$  αρχή αξόνων
- ii. Κλιμάκωση με τον λόγο των διαστάσεων viewport παραθύρου
- iii. Μεταφορά από αρχή αξόνων  $\implies$  κέντρο viewport

## ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Μετατροπή τύπων Affine μετασχηματισμών σε  
ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

$$(x' y') = (x \ y) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$(x' \ y' \ 1) = (x \ y \ 1) \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Μεταφορά

$$(x' \ y' \ 1) = (x \ y \ 1) \begin{pmatrix} a^1 & b^0 & 0 \\ c^0 & d^1 & 0 \\ \theta_1 & \theta_2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q = PM_T$$

Κλιμάκωση

$$M_S = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Περιστροφή

$$M_R = \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

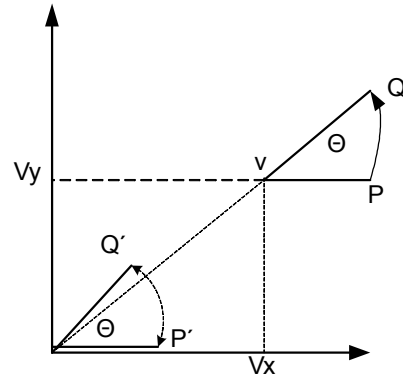
Shearing

$$M_{SH} = \begin{pmatrix} 1 & q & 0 \\ h & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Συνδυασμοί π.χ.  $Q = (PM_R)(M_S)$

## Παράδειγμα: Περιστροφή γύρω από τυχαίο σημείο

- I. Μεταφορά P κατά  $(-v_x, -v_y)$
- II. Στροφή γύρω από αρχή αξόνων ( $\theta$ )
- III. Μεταφορά Q' κατά  $(v_x, v_y)$



$$(q_x, q_y) = [(p_x, p_y) + (-v_x, -v_y)] \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} + (v_x, v_y) = (p_x, p_y) \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} + (t_x, t_y)$$

όπου

$$c = \cos \theta$$

$$t_x = v_x(1 - c) + v_y s$$

$$s = \sin \theta$$

$$t_y = -v_x s + v_y(1 - c)$$

### Μέσω Ομογενών Συντεταγμένων

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -v_x & -v_y & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ v_x & v_y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ v_x(1 - c) + v_y s & -v_x s + v_y(1 - c) & 1 \end{pmatrix}$$

Συνεχόμενες Μεταφορές  $M'_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \theta_{11} + \theta_{12} & \theta_{21} + \theta_{22} & 1 \end{pmatrix}$

Συνεχόμενες Κλιμακώσεις  $M'_S = \begin{pmatrix} Sx_1 Sx_2 & 0 & 0 \\ 0 & Sy_1 Sy_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Συνεχόμενες Περιστροφές  $M'_R = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \theta') & \sin(\theta + \theta') & 0 \\ -\sin(\theta + \theta') & \cos(\theta + \theta') & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Απόδειξη

$$\begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c' & s' & 0 \\ -s' & c' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} cc' - ss' & cs' + sc' & 0 \\ -(cs' + sc') & cc' + ss' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv M'_R$$

$$\begin{aligned} c &= \cos \theta & c' &= \cos \theta' \\ s &= \sin \theta & s' &= \sin \theta' \end{aligned}$$

Γενικευμένες Ομογενείς Συντεταγμένες

$$(a, b) \rightarrow (a, b, 1) \leftrightarrow (wa, wb, w)$$

παριστάνουν το P

$$\text{άρα } (x, y, z) \leftrightarrow \left(\frac{x}{z_x}, \frac{y}{z_y}, 1\right) \rightarrow \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$$

ΠΡΟΒΟΛΕΣ 3-Δ σε 2-Δ



### 3-Δ (Affine) Μετασχηματισμός

$$Q = P * M + T$$

Ιδιότητες:

- Διατήρηση γραμμών
- Διατήρηση Παραλληλίας γραμμών
- Αναλογίες μηκών
- Ο όγκος 3Δ-αντικειμένου κλιμακώνεται ως εξής

$$\frac{V_M}{V} = |\det M|$$

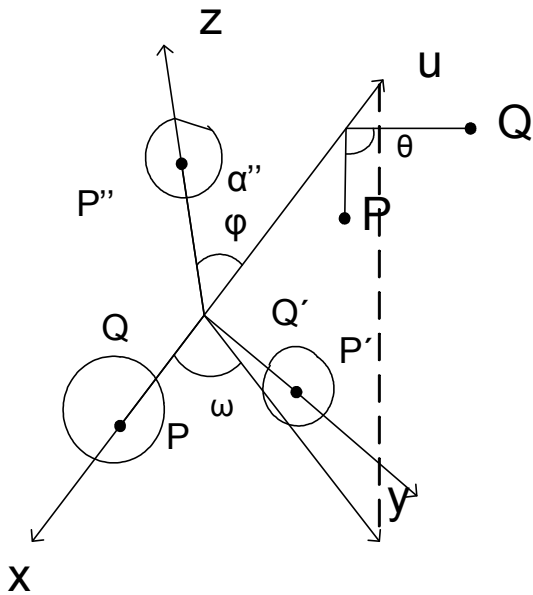
Μεταφορά  $M = I$

Κλιμάκωση

περί την αρχή των αξόνων  $M = \begin{pmatrix} S_x & & \\ & S_y & \\ & & S_z \end{pmatrix}$

3-Δ shear  $M = \begin{pmatrix} 1 & h_{xy} & h_{yz} \\ h_{yx} & 1 & h_{yz} \\ h_{zx} & h_{zy} & 1 \end{pmatrix}$

## ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ



a) Γύρω από κάποιον τους άξονες  $x, y, z,$

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{pmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} c & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Περιστροφή  $x \rightarrow y$  (γύρω από  $z$ )  
 $y \rightarrow z$  (γύρω από  $x$ )  
 $z \rightarrow x$  (γύρω από  $y$ )

b. Γύρω από τυχαίο άξονα  $u$  που περνάει από αρχή αξόνων

$$\phi \equiv \angle (z, u) \in [0, \pi]$$

$$\omega \equiv \angle (x, (z, u)) \in [0, 2\pi]$$

επίπεδο

- i. Περιστροφή  $u$  ώστε να συμπίπτει με  $z$
- ii. Περιστροφή περί  $z$  κατά γωνία  $\theta$
- iii. Αντίστροφες περιστροφές για το  $u$

## Διατήρηση Επιπέδων

$$P(u, v) = c + au + bv$$

$C$  : διάνυσμα συντεταγμένων σημείου

$a, b$  : 2 διανύσματα διευθύνσεων

$$P(u, v) = (C_x + a_x u + b_x v)^i + (C_y + a_y u + b_y v)^j + (C_z + a_z u + b_z v)^k$$

διότι

$$q(u, v) = (c + au + bv)M + t = (cM + t) + (aM)u + (bM)v \equiv \text{Επίπεδο}$$

- i) Περιστροφή περί το z κατά  $-\omega \Rightarrow u' \in \{\text{επίπεδο } x,z\}$   
Περιστροφή περί το y κατά  $-\phi \Rightarrow u'' \equiv z$  διεύθυνση

$$R_Z(-\omega) \cdot R_Y(-\phi)$$

- ii) Περιστροφή περί το z κατά  $\theta$

$$R_Z(\theta)$$

- iii) Αντίστροφες περιστροφές του (i)

$$R_Y(\phi)R_Z(\omega)$$

$$\text{Συνολικά } R_U(\theta) = R_Z(-\omega)R_Y(-\phi)R_Z(\theta)R_Y(\phi)R_Z(\omega)$$

### ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΣΥΝΤΕΝΤΑΓΜΕΝΕΣ

$$(Q_X, Q_Y, Q_Z, 1) = (P_X, P_Y, P_Z, 1) \hat{M}$$

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & 0 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & 0 \\ \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & 1 \end{pmatrix}$$

Γενικότερα  $(Q_X, Q_Y, Q_Z, W)$

## Παραμετρικές Παραστάσεις Καμπυλών

### 1. Γραμμές – Ακτίνες – Τμήματα

$$x(t) = a_x + (b_x - a_x)t \quad A(a_x, a_y)$$

$$y(t) = a_y + (b_y - a_y)t \quad B(b_x, b_y)$$

Ευθ. Τμήματα  $0 \leq t \leq 1$

Ακτίνες  $0 \leq t < \infty$

Γραμμές  $-\infty < t < \infty$

$$\text{Κλίση} \quad \frac{b_y - a_y}{b_x - a_x}$$

Γραμμή κάθετη στο μέσο ευθ. Τμήματος

$$\text{Μέσο} \quad m = \left( \frac{a_x + b_x}{2}, \frac{a_y + b_y}{2} \right) \equiv (m_x, m_y)$$

$$\text{Κλίση} \quad \frac{b_x - a_x}{-b_y - a_y}$$

$$\text{Άρα} \quad x(t) = m_x - (b_y - a_y)t$$

$$y(t) = m_y + (b_x - a_x)t$$

## Κύκλοι. Ελλείψεις

Κ:  $x(t)=R\cos(2\pi t)$

$y(t)=R\sin(2\pi t)$

Ε:  $x(t)= a \cos(2\pi t)$

$y(t)= b \sin(2\pi t)$        $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

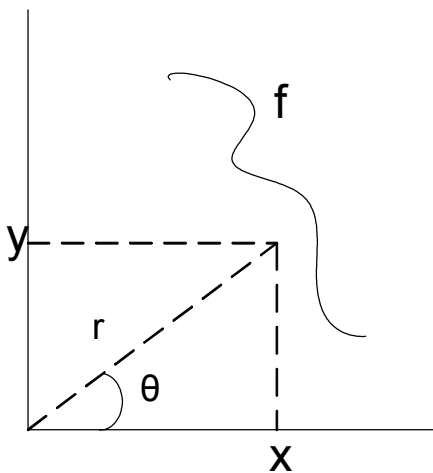
Εκκεντρότητα  $e = \frac{c}{a}$  , όπου  $c^2 = a^2 - b^2$  για  $a \geq b$

Σούπερ ελλείψεις – Σούπερ κύκλοι ( $A=B$ )

$x(t)= A \cos (t)^{2/n}$

$y(t)= B \sin (t)^{2/n}$        $-\pi < t < \pi$

Polar Συντεταγμένες



$r = f(\theta)$   
 $x = f(\theta) \cos\theta$   
 $y = f(\theta) \sin\theta$

αν  $f(\theta) = \kappa \longrightarrow$  κύκλος

πχ. Λογάριθμοι Spiral

$f(\theta) = \kappa e^{a\theta}$

Τροχοειδείς

Κύκλοι που κυλούν επάνω σε κύκλους

- εξωτερικά ή εσωτερικά

Ανομοιόμορφος Κβαντισμός του (χρόνου)  $t$

$$t = \sqrt{\frac{i-1}{n-1}} \quad i=1, \dots, N$$

πυκνότητα μεγαλώνει για μεγάλα  $i$

$$t = \frac{(i-1)^2}{(N-1)^2}$$

δείγματα λιγοστεύουν για μεγάλα  $I$

Έλεγχος τομής ευθυγράμμων Τμημάτων

1<sup>η</sup>

$$x_1(t) = a_x + (b_x - a_x)t \quad (1)$$

$$y_1(t) = a_y + (b_y - a_y)t$$

$$x_2(u) = c_x + (d_x - c_x)u \quad (2)$$

$$y_2(t) = c_y + (d_y - c_y)u$$

Οι γραμμές που φαίνονται στα (1) κ (2) τέμνονται ?  
Αν ναι, τότε

$$\begin{aligned} a_x + (b_x - a_x) t_o &= c_x + (d_x - c_x) u_0 \\ a_y + (b_y - a_y) t_o &= c_y + (d_y - c_y) u_0 \end{aligned} \quad \rightarrow$$

$$t_o = \frac{(c_x - a_x)(d_y - c_y) - (c_y - a_y)(d_x - c_x)}{(b_x - a_x)(d_y - c_y) - (b_y - a_y)(d_x - c_x)}$$

$$\text{αν } D \neq 0 \Rightarrow \left| t_o \in [0,1] \right| \begin{array}{l} \rightarrow u_o \in [0,1] \\ \rightarrow \text{όχι τομή} \end{array}$$

0

αν  $D = 0 \Rightarrow$  παράλληλες γραμμές  
[ταυτίζονται  $\{c \in (a,b)\}$

↙ ;  
ταυτίζονται και τα τμήματα

↙ ;  
υπολογισμός  $t_c, t_d$  από την πρώτη γραμμή

$$t_c, t_d \in [0,1]$$

;



## ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

- πρόσθεση / αφαίρεση / μέτρο  $|w| = \sqrt{w_1^2 + \dots + w_n^2}$

- κανονικοποίηση  $\underline{u}_a = \frac{a}{|a|}$

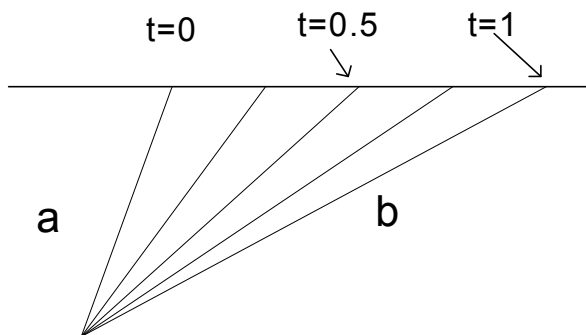
- Γραμμικοί συνδυασμοί  $W = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_m u_m$

Κυρτοί συνδυασμοί  $a_i \geq 0, \sum \alpha_i = 1$

Διανυσματικές συναρτήσεις

$$\underline{P}(t) = \underline{a}(1-t) + \underline{b}(t)$$

$$0 \leq t \leq 1$$



Εσωτερικό Γινόμενο

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \sum \alpha_i \cdot b_i$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |a||b| \cos\theta \rightarrow \cos\theta = \underline{u}_a \underline{u}_b$$

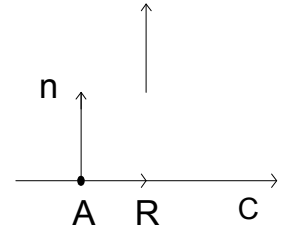
## Καθετότητα

$$\underline{\alpha} \cdot \underline{\beta} = 0$$

$$\underline{\alpha} \cdot \underline{\beta} > 0 \Rightarrow \theta < 90^\circ$$

αν

$$\underline{\alpha} \cdot \underline{\beta} < 0 \Rightarrow \theta > 90^\circ$$



Εξίσωση καθετότητας σημείου μιας γραμμής  $(\underline{a} - \underline{r})\underline{n} = 0$

$A = (A_x, A_y)$   $\underline{C} = (C_x, C_y)$  κατεύθυνση

Κάθετη  $\underline{c} \cdot \underline{n} = 0$

Διεύθυνση

Για ένα άλλο σημείο της γραμμής R ( $\underline{r}$ )

$$\underline{n} \cdot \underline{r} = \underline{n} \cdot \underline{a} \equiv D$$

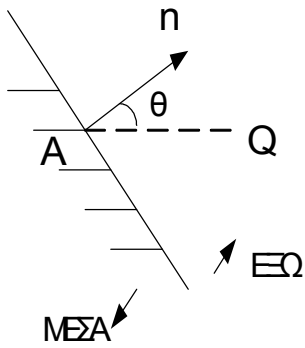
ενός επιπέδου

$$\underline{n} \cdot \underline{r} = \underline{n} \cdot \underline{s} \equiv D$$

$$S = (s_x, s_y, s_z)$$

$$\underline{n} = (n_x, n_y, n_z)$$

Έλεγχος Αριστερού / Δεξιού Ημιεπιπέδου για Σημείο



Έλεγχος γωνίας  $\theta$  μεταξύ καθέτου και σημείου Q διανύσματα  $\underline{q}$

$$(\underline{Q} - \underline{A}) \cdot \underline{n} > 0 \quad ?$$

ισοδύναμα

$$E : \underline{n} \cdot \underline{p} = D$$

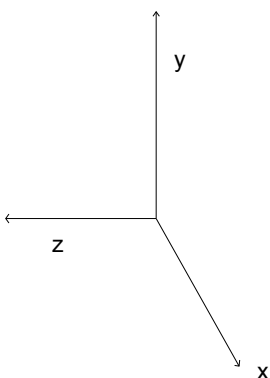
Έλεγχος

Q:

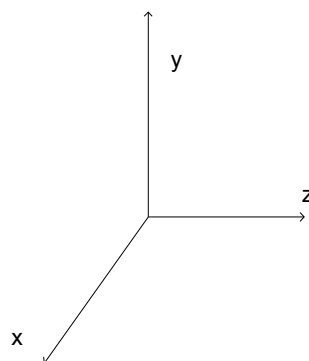
$$\underline{q} \cdot \underline{n} \begin{cases} > D \rightarrow \acute{\epsilon}\xi\omega \\ = \\ > \rightarrow \acute{\mu}\acute{\epsilon}\sigma\alpha \acute{\eta} \\ ; \end{cases}$$

### 3-Δ Διανύσματα

Δεξιόστροφο



Αριστερόστροφο



Μοναδικά Διανύσματα

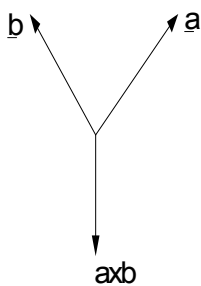
$\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$

## Εξωτερικό γινόμενο

$$\underline{a} = (a, b, c) = a\underline{i} + b\underline{j} + c\underline{k}$$

$$\underline{a} \times \underline{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \underline{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \underline{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \underline{k}$$

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$



$$i \times j = k$$

$$j \times k = i$$

$$k \times i = j$$

$$a \times b = -b \times a$$

$$S = \underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c})$$

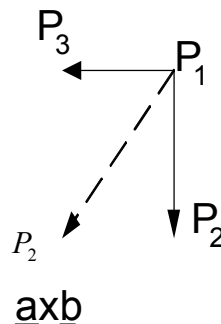
$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \rightarrow \text{μέτρο όγκου}$$

Κάθετος σε επίπεδο

$$\underline{a} \times \underline{b}$$

$$\underline{a} = \underline{P}_2 - \underline{P}_1$$

$$\underline{b} = \underline{P}_3 - \underline{P}_1$$

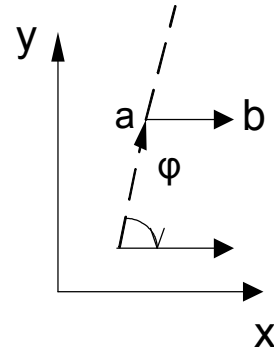
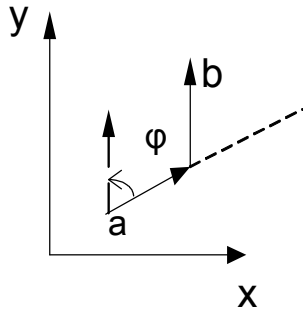


Στροφή αριστερά / δεξιά ενός πολυγώνου

$P_1, P_2, P_3$  κορυφές

$$\rightarrow \underline{a} = P_2 - P_1$$

$$\underline{b} = P_3 - P_2$$



αν  $T = \underline{K} \cdot (\underline{a} \times \underline{b}) \geq 0$

+

$T < 0$  έστω δεξιόστροφο  
σχήμα  $\underline{K}$  (προς τα έξω)

## ΠΡΟΒΟΛΕΣ

Ορθογραφικές

- Ακτίνες κάθετες στο επίπεδο προβολής

Παράλληλες

- Ακτίνες παράλληλες μεταξύ τους

Προοπτικές

Ακτίνα μάτι  $\rightarrow P$

$$r(t) = (E, 0, 0) (1-t) + (x, y, z)t$$

Τομή με επίπεδο

$$x = 0 \quad t' = \frac{1}{1 - x/E} \quad , \quad \text{έστω } x < E$$

$$y' = \frac{y}{1 - x/E}$$

$$z' = \frac{z}{1 - x/E}$$

διατήρηση ευθειών / τμημάτων

## ΨΑΛΙΔΙΣΜΑ

### Επιλογή Ορατών Περιοχών Εικόνων

- Τμήματα Γραμμών
- Φαινόμενα αναδίπλωσης

Εφαρμογή σε

- Σημεία
- Γραμμές
- Καμπύλες
- Χαρακτήρες
- Πολύγωνα

### **Ψαλίδισμα Γραμμών(Αλγόριθμος Sutherland – Cohen)**

- Ορατό Τμήμα : Σύγκριση με Άκρα
- Απόρριψη Γρήγορη Αοράτων Γραμμών

Κριτήρια:

- 1) Γραμμή όλη μέσα στην οθόνη?
- 2) Αν όχι μπορεί να απορριφθεί ως Αόρατη?

Όχι? Διαίρεση σε 2 τμήματα  
Επανάληψη σε κάθε τμήμα

α	β	γ
δ	Οθόνη 0000	ε
z	η	θ

	b <sub>4</sub>	b <sub>3</sub>	b <sub>2</sub>	b <sub>1</sub>
α:	1	0	0	1
β:	1	0	0	0
γ:	1	0	1	0
<hr/>				
δ:	0	0	0	1
ε:	0	0	1	0
<hr/>				
z:	0	1	0	1
η:	0	1	0	0
θ:	0	1	1	0

$$b_1=1 \{ \alpha, \delta, z \}$$

$$b_2=1 \{ \gamma, \epsilon, \theta \}$$

$$b_3=1 \{ z, \eta, \theta \}$$

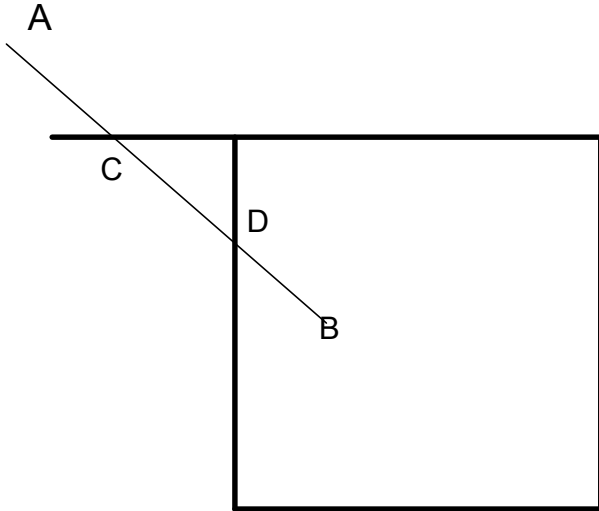
$$b_4=1 \{ \alpha, \beta, \gamma \}$$

Ακρα Τμήματος : (0,0,0,0) → ΟΡΑΤΟ:

$$\binom{A}{0000} \cap \binom{B}{0000} \neq \left\{ \binom{0}{0000} \right\} \rightarrow$$

ΑΟΡΑΤΗ





Εύρεση Τομών  
Απόρριψη Αοράτων  
Τμημάτων

## Αλγόριθμος Υποδιαίρεσης στο Μέσο του Τμήματος

- Μη υπολογισμός σημείων τομής
- Υπολογισμός ορατού σημείου στη γραμμή AB που είναι μακρύτερα από το i) A και ii)B.
- Επαναληπτική υποδιαίρεση στο μέσο τμήματος που περιλαμβάνει ορατό υποτμήμα

## ΨΑΛΙΔΙΣΜΑ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ

### I. Αλγόριθμος Sutherland –Hodgman

- Ψαλίδισμα του πολυγώνου ως προς ένα κυρτό πολύγωνο (πχ το ορθογώνιο)
- Ορίζει εσωτερικό-εξωτερικό ως προς κάθε γραμμή του κυρτού πολυγώνου

Σχήμα A.6.1-3

## II. Αλγόριθμος Weiler – Atherton

- Αφαίρεση Κρυμμένων Επιφανειών
- Ψαλίδισμα κοίλων κ' κυρτών πολυγώνων ως προς άλλα κοίλα και κυρτά

### Βήματα

- Ορισμός φοράς κίνησης πάνω στις ακμές των πολυγώνων
- Ψαλιδισμός  $\equiv$  καθορισμός κίνησης πάνω στο σύνολο των ακμών των 2 πολυγώνων με μεταφορά από το 1 στο άλλο στις τομές (κίνηση κατά την καθορισθείσα φορά π.χ. δεξιόστροφα)

Σχήμα Α6.4-5

(Τομή Πολυγώνων – Ένωση Πολυγώνων – Διαφορά Πολυγώνων)

Εξωτερικός Ψαλιδισμός

Σχήμα Α.6.7

## ΨΑΛΙΔΙΣΜΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΩΝ

- Η διαγώνιος του τετραπλεύρου που περικλείει τον χαρακτήρα είναι Ορατή?  
Αν ναι → Επίδειξη χαρακτήρα  
όχι → Παράλειψη χαρακτήρα
- Χωρισμός Χαρακτήρα σε μικρά ευθύγραμμα τμήματα
- Χρήση αλγορίθμων ψαλιδίσματος

## ΓΕΜΙΣΜΑ ΣΥΜΠΛΑΓΩΝ ΠΕΡΙΟΧΩΝ

### Γέμισμα Πολυγώνων

#### Τεχνικές

##### Scan Conversion

- γραμμή σάρωσης
- Έλεγχος σημείων γραμμής (διαδικασία μέσα στο μικρότερο ορθογώνιο γύρω από το πολύγωνο)

##### Seed Fill

- Δεδομένο ένα S seed στο εσωτερικό
- Έλεγχος γειτονικών σημείων t
- $S \leftarrow t ?$
- Επαναληπτικός αλγόριθμος (περίγραμμα πολυγώνων)  $\equiv$  διατεταγμένη λίστα κορυφών του

### Προτεραιότητα

- Αλγόριθμός Ζωγράφου
  - Ταξινόμηση κατά προτεραιότητα
  - Γέμισμα Πολυγώνου με ταξινόμηση κατά σειρά σάρωσης